بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه (۳)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

راهنمای معلّم

پایهٔ دوازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

دوره عمومی دلتا-رهپویان استخدام
ویژه دروس عمومی جدید دبیری ریاضی
به شیوه نکته و تست
خط به خط بدون حذفیات

★★★★★★

@Erahpooyan

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: راهنمای معلم هندسه(۳) ـ پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۲۳۶۵

پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سیدمحمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
اسحاق اسفندیار،حمیدرضا امیری، محمدرضا سیدصالحی،هوشنگ شرقی و نرگس کارگر(اعضای گروه تألیف)

آماده سازی و نظارت برچاپ و توزیع: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ جواد صفری (مدیر هنری) ـ رضوان جهانی فریمانی (صفحه‌آرا) ـ سوروش سعادتمندی، فرشته‌ارجمند، نوشین‌معصوم‌دوست، سپیده ملک‌ایزدی و ناهید خیام‌باشی (امور آماده‌سازی)

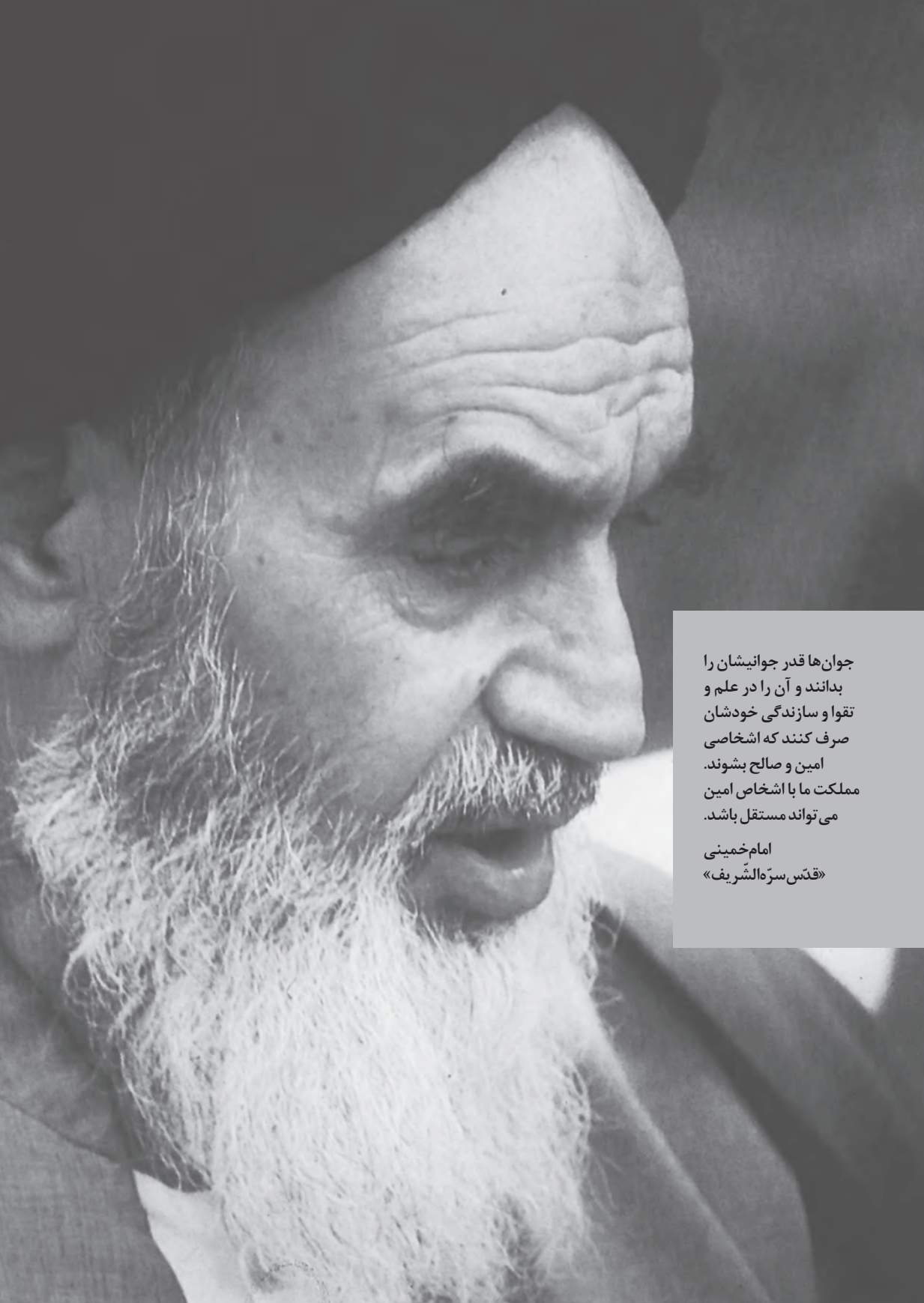
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir

ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اوّل ۱۳۹۷

شابک ۹ـ۳۳۱۰ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978_964_05_3310 _9



جوان‌ها قدر جوانیشان را بدانند و آن را در علم و تقوا و سازندگی خودشان صرف کنند که اشخاصی امین و صالح بشوند. مملکت ما با اشخاص امین می‌تواند مستقل باشد.

امام‌خمینی
«قدّس‌سرّه‌الشّریف»

کلیهٔ حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلّق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به‌صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیهٔ فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوّز از این سازمان، ممنوع است و متخلّفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

فهرست

فصل ۱ : ماتریس و کاربردها **۱**

درس اول : ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها ۴

درس دوم : وارون ماتریس و دترمینان ۱۰

فصل ۲ : آشنایی با مقاطع مخروطی **۲۷**

درس اول : آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی ۳۳

درس دوم : دایره ۳۴

درس سوم : بیضی و سهمی ۳۷

فصل ۳ : بردارها **۵۵**

درس اول : معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ ۶۰

درس دوم : ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها ۶۵

مقدمه

هندسه به عنوان یک مهارت پایه‌ای ریاضی، در برنامه درسی ریاضی بسیاری از کشورها، مورد تأیید و توجه قرار گرفته و تفکر هندسی و آموزش هندسه، در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. از همین رو در تألیف کتاب درسی سعی بر آن بوده است که نخست حوزهٔ هندسه و اندازه‌گیری و چگونگی آموزش آن، مورد بازاندیشی قرار گیرد و سپس محتوای کتاب با تکیه بر آخرین دستاوردهای پژوهشی در این حوزه و با تبعیت از اسناد بالا دستی از جمله سند برنامه درسی ملی، تنظیم و پیشنهاد شود.

بدین ترتیب برخی اصول و رویکردهای کلی، هدایتگر مؤلفین این کتاب بوده است. ازجمله اینکه در تنظیم و تدوین محتوای کتاب، متوسط هوش و توان یادگیری دانش‌آموزان مد نظر می‌باشد. روند آموزش در این کتاب به آرامی از شهود آغاز شده و به سمت تجرید پیش می‌رود و مشابه با سایر کتاب‌های درسی جدیدالتألیف، با اخذ توجه بیشتر به فعالیت دانش‌آموزان، سعی بر آن است که شیوهٔ آموزش از معلم محوری فاصله گرفته و طالب مشارکت بین معلم و دانش‌آموزان باشد. نگاه کاربردی و برقراری ارتباط هندسه با زندگی روزمره، رویکرد دیگری است که در تدوین کتاب مورد توجه قرار گرفته و تلاش شده که تلفیقی از هندسه با سایر حوزه‌های مطالعاتی نظیر معماری، هنر و زیبایی‌شناسی ارائه شود.

در این کتاب تلاش شده است با زمینه‌سازی برای آشنایی دانش‌آموزان با انواع استدلال و تقویت توانمندی تشخیص اثبات‌های معتبر از اثبات‌های نامعتبر ــ همسو با آرمان‌های سند برنامه درسی ملی ــ بستر لازم برای تربیت و پرورش انسان‌هایی که در برخورد با مسائل می‌توانند به طور منطقی استدلال کنند و قدرت تجزیه و انتزاع بیشتری دارند، فراهم شود.

همچنین سعی بر آن بوده است که بر تقویت و توسعهٔ روحیه پرسشگری، پژوهشگری و خلاقیت در دانش‌آموز تأکید شود. بدین ترتیب با زمینه‌سازی برای ایجاد نظم فکری با توجه به سلسله مراتب اصول و قضایا و تشخیص روابط منطقی بین مفاهیم و زمینه‌سازی برای دست‌یابی به علم نسبت به پدیده‌ها، روابط، رویدادها و قوانین جهان آفرینش، به دانش‌آموز کمک می‌شود که به درک قانونمندی‌های طبیعت نائل آید.

بیان دقیق ایده‌های هندسی با به‌کارگیری زبان هندسی و تقویت گفتمان ریاضی، پرورش ذهن خلاق و بالا بردن درک فضایی دانش‌آموزان، شناسایی و تحلیل ویژگی‌ها و مشخصه‌های اشکال هندسی در صفحه و فضا اهداف دیگری است که در راستای تقویت تفکر تجسمی ــ که مورد تأکید برنامه درسی ملی است ــ هدایتگر تنظیم محتوای این کتاب بوده است. بدین ترتیب در این قسمت سعی شده است که بدون ورود به حیطهٔ محاسبات و استدلال و تنها به کمک درک شهودی، دانش‌آموزان با مهم‌ترین سازه‌های ساختمان هندسه آشنا شده و به زبان تصاویر و اشکال هندسی گفت و گو کنند.

فصل اول

ماتریس و کاربردها

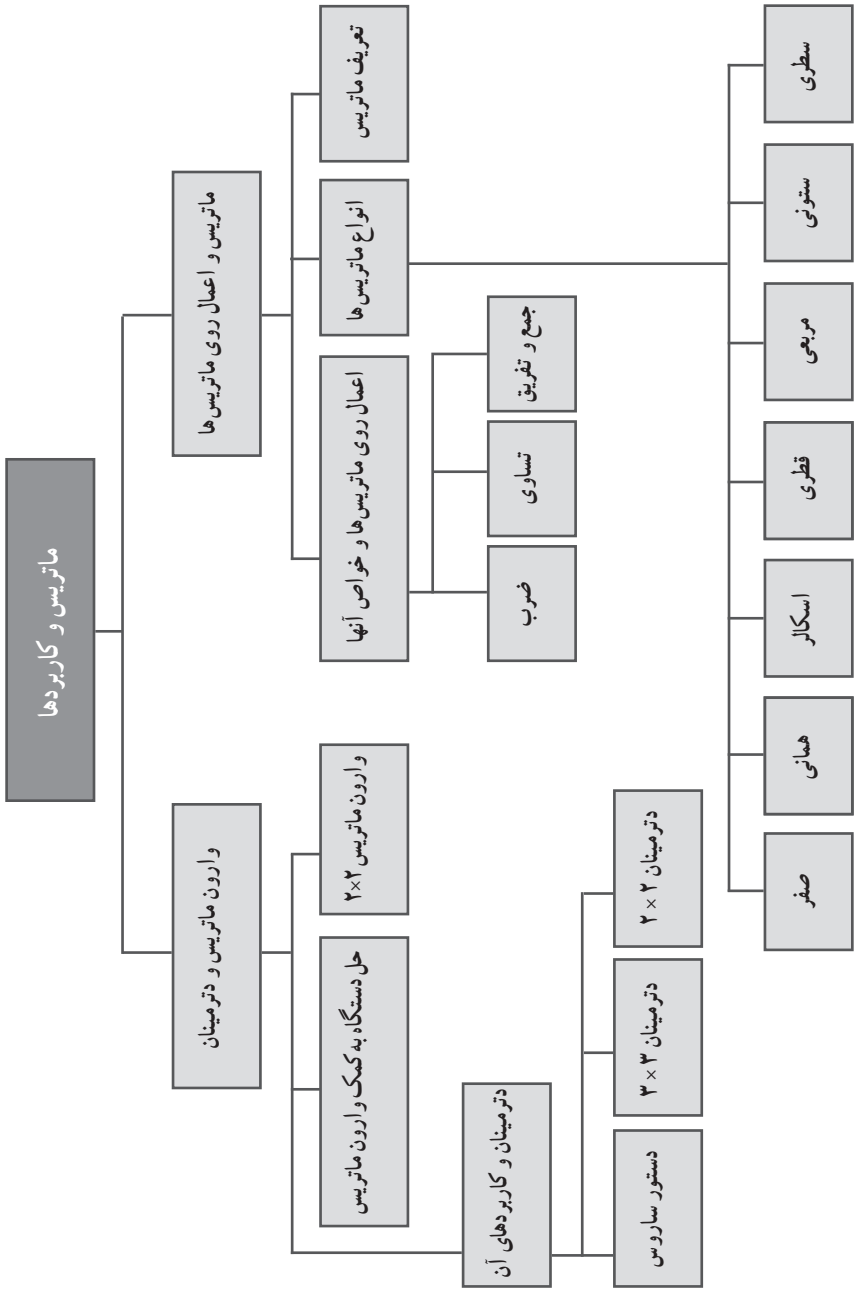
نگاه کلی به فصل

در این فصل دانش‌آموز با مفاهیمی چون ماتریس و دترمینان آشنا می‌شود و اعمال اصلی روی ماتریس‌ها را می‌آموزد. ماتریس مفهوم جدیدی است که دانش‌آموزان تا به حال با آن آشنا نشده‌اند، اگر دانش‌آموز جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد حقیقی را بداند مفهوم ماتریس را به سادگی می‌آموزد. این فصل ۲ درس دارد که درس اول به مفهوم ماتریس، انواع ماتریس‌ها و اعمال روی ماتریس می‌پردازد و به خواص آنها اشاره می‌کند و مهارت حساب در مورد ماتریس‌ها را بالا می‌برد. در فصل دوم در مورد وارون ماتریس‌بحث و طریقه به‌دست آوردن وارون ماتریس بیان می‌شود و دانش‌آموز مشخص می‌کند کدام ماتریس‌ها وارون دارند و آنهایی که وارون دارند، وارون آن را مشخص می‌کند. همچنین با مفهوم دترمینان آشنا می‌شوند که چگونه یک ماتریس مربعی را به یک عدد حقیقی تبدیل می‌کند.

سپس دستگاه به عنوان یک کاربرد از وارون ماتریس ارائه شده و جواب‌های دستگاه‌های دو در دو را به کمک وارون ماتریس پیدا می‌کند.

و در انتها دترمینان ماتریس ۳ × ۳ را به‌عنوان یک مهارت یاد می‌گیرد.

نقشه مفهومی


ماتریس و کاربردها
ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها
وارون ماتریس و دترمینان
تعریف ماتریس
انواع ماتریس‌ها
اعمال روی ماتریس‌ها و خواص آنها
وارون ماتریس ۲×۲
حل دستگاه به کمک وارون ماتریس
دترمینان و کاربردهای آن
جمع و تفریق
تساوی
ضرب
دترمینان ۲ × ۲
دترمینان ۳ × ۳
دستور ساروس
سطری
ستونی
مربعی
قطری
اسکالر
همانی
صفر

درس اول
ماتریس و اعمال روی آنها

اهداف درس اول

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند :

۱ آشنایی با مفهوم ماتریس و جزئیات آن نظیر درایه‌ها، مرتبه، سطر و ستون، نام‌گذاری آنها

۲ با انواع ماتریس آشنا شوند و ماتریس‌های مربعی با غیرمربعی را تشخیص دهند. ماتریس‌های قطری، اسکالر، همانی و صفر را بشناسند و مثال بزنند.

۳ اعمال روی ماتریس را بیاموزند بتوانند ماتریس‌ها را باهم جمع یا کم کنند و ضرب ماتریس‌ها که جزء مفاهیم بسیار کاربردی در ریاضیات است را خوب یاد بگیرند. و ماتریس‌ها را در صورت ضرب شدن، ضرب کنند.

۴ خواص جمع و تفریق و ضرب ماتریس را بیاموزند و بتوانند از آنها استفاده کنند. به‌عنوان یک مهارت با آن آشنا باشند.

۵ بتوانند مسائل روزمره را به‌صورت ماتریس در بیاورند و به کمک ماتریس به‌جواب برسند.

روش تدریس

هدف اصلی در این درس آشنا شدن با مفهوم ماتریس به‌عنوان یک مفهوم کلیدی در ریاضیات است. کاربرد ماتریس در ریاضیات، به‌خصوص ریاضیات جدید بسیار زیاد است لذا می‌خواهیم دانش‌آموزان با این مفاهیم ارتباط خوبی بگیرند. لذا برای اینکه به این هدف برسیم لازم است از مثال‌های کاربردی استفاده شود و دانش‌آموز مفهوم ماتریس را به‌عنوان یک درس ضروری در زندگی خود احساس کند.

ابتدا به چند نمونه مثال اشاره کنند. سپس ماتریس را تعریف کنند. سطرها و ستون‌ها را مشخص کنند و درایه‌ها را مشخص کنند و از دانش‌آموز بخواهیم که چند ماتریس با مرتبه مشخص مثال بزند. سپس یکی از مسائل کاربردی که گفته شده را بخواهیم به‌صورت ماتریس نمایش دهند. همانند کار در کلاس صفحه ۱۱، که دانش‌آموز مسئله اصلی و واقعی را به‌صورت ماتریس نمایش دهد. و برعکس.

نمایش ماتریس که جز مفاهیم بسیار کلیدی در ماتریس‌هاست با آنها آشنا شود. در این قسمت سعی شود با حوصله بیشتری آموزش داده شود. ماتریس‌ها به‌صورت رابطه‌ای بین درایه‌ها نشان داده شود و

از دانش‌آموز بخواهیم به‌صورت آرایش مستطیلی نشان دهد و برعکس. یعنی یک ماتریس را مشخص کنیم و دانش‌آموز آن را به‌صورت رابطه ریاضی بین درایه‌ها نشان دهد. همانند مثال صفحه ۱۱. در این قسمت، دانش آموزان تمرین بیشتری نیاز دارند سعی شود چند نمونه برای مهارت بیشتر، به‌صورت تمرین در منزل به آنها واگذار شود.

ماتریس‌ها را معرفی کنیم و از دانش‌آموزان بخواهیم آنها را بشناسند و مثال بزنند. به‌عنوان مثال، از دانش‌آموز بخواهیم ماتریس قطری مثال بزند که یکی از درایه‌های آن $\sqrt{2}$ باشد.

تساوی ماتریس در صفحه ۱۳ بیان شده و چند مثال در این مورد بیان شود و اگر زمان تدریس در کلاس محدود است. چند نمونه به‌عنوان تمرین به دانش‌آموز واگذار گردد. در صفحه ۱۴، کار در کلاس در مورد جمع ماتریس‌هاست. پیشنهاد می‌شود دو ماتریس متفاوت با مرتبه‌های متفاوت مثال زده شود و از دانش‌آموز بخواهیم آنها را جمع کند و به این نتیجه برسد که آنها با هم جمع نمی‌شوند و شرط جمع‌پذیری ماتریس را بیان کند.

بیان مثال‌های نظیر مثال قسمت (ث) در کار در کلاس بسیار توصیه می‌گردد. در کار در کلاس صفحه ۱۵، می‌خواهیم دانش‌آموز ضرب عدد در ماتریس را بیاموزد و همچنین بتواند از عدد در ماتریس‌ها فاکتور بگیرد. سعی شود دانش‌آموز خودش به این نتیجه‌ها برسد.

چند مثال عددی در مورد خواص جمع و ضرب عدد در ماتریس و تفریق بیان شود. و از دانش‌آموز بخواهیم به این خواص که در صفحه ۱۵ بیان شده برسد و با این ویژگی‌های ماتریس آشنا شود. یک حالت کلی که در صفحه ۱۶ بیان شده برای آنها حل کنیم. کار در کلاس صفحه ۱۷، آشنایی با همین خواص ضرب عدد در ماتریس است.

در قسمت ۲ کار در کلاس صفحه ۱۷، بهتر است به این صورت حل شود.

ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و r و s دو عدد حقیقی باشند آنگاه

$$(r+s)\,A = (r+s)\,[a_{ij}] = [(r+s)a_{ij}] = [ra_{ij} + sa_{ij}] =$$
$$[ra_{ij}] + [sa_{ij}] = r[a_{ij}] + s[a_{ij}] = rA + sA$$

به همین ترتیب برای تفریق حل شود.

هدف از کار در کلاس ۱۷ پایین صفحه، آشنایی دانش‌آموزان با ضرب دو ماتریس سطری و ستونی است. اجازه دهیم دانش‌آموزان به این نتیجه برسند. اجازه دهیم مسئله (باز پاسخ) باشد. مثال‌های متعددی بیان کنند و فکر کنند که جواب منحصر بفرد است. هدف از این مثال بیان حالت‌های مختلف است.

ضرب ماتریس در ماتریس

ضرب ماتریس‌ها با حاصل‌ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی آغاز شود. چند نمونه ماتریس سطری در ستونی بیان شود تا مطمئن شویم این ضرب را به‌عنوان یک مهارت کسب کرده سپس وارد ضرب یک ماتریس سطری ۲×۱ در یک ماتریس ۲×۲ شویم چند نمونه از این ضرب‌ها را انجام دهیم. دقت شود در ضرب ماتریس‌ها بسیار باید با دقت عمل کنیم یکی از مفاهیم است که کج فهمی در آن بسیار زیاد است. بعد از ضرب ماتریس سطری در چند ماتریس مربعی و غیرمربعی، به ضرب ماتریس‌های ۲×۲ درهم ادامه دهیم و کار در کلاس صفحه ۱۸ را حل کنیم. در قسمت (پ) کار در کلاس قبل از ضرب از دانش‌آموز بخواهیم آیا ماتریس‌ها شرایط ضرب را دارند، سپس مرتبه ماتریس حاصل ضرب را بخواهیم و بعد عمل ضرب را انجام دهند.

قسمت (ت) کار در کلاس صفحه ۱۸ و ۱۹ از دانش‌آموز بخواهیم چند ماتریس مثال بزند و بعد مقایسه کند.

می‌دانیم در مجموعه اعداد حقیقی اگر حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی صفر شود حداقل یکی از آنها صفر است امّا در ماتریس‌ها ممکن است چنین نباشد. دو ماتریس دارای حاصل‌ضرب صفر باشند ولی خودشان صفر نباشند. مانند :

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-۵\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۵\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}=-۵+۲+۳=۰$$

مثال دیگر :

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳-۳ & ۱-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\end{bmatrix}$$

مثال دیگر، از ضرب ۲×۲ها

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱+۱ & -۱+۱\\ -۱+۱ & -۱+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

در این قسمت اجازه دهیم دانش‌آموزان خودشان چند مثال بیاورند.

هدف کار در کلاس ۱ صفحه ۱۹ (وسط صفحه)

آموزش خاصیت جابه‌جایی در عمل ضرب ماتریس‌هاست. با حل این کار در کلاس به این نتیجه می‌رسد و از دانش‌آموز می‌خواهیم نتیجه زیر کار در کلاس را خودش کامل کند.

در قسمت ۲ کار در کلاس: هدف خاصیت ضرب ماتریس همانی در ماتریس‌هاست. با انجام کاردرکلاس دانش‌آموز به نتیجه زیر کار در کلاس می‌رسد. در ضمن در این قسمت اجازه دهید دانش‌آموز این ضرب را با ماتریس ۳×۳ امتحان کند. هدف قسمت ۳ کار در کلاس خاصیت توزیع‌پذیری است. با حل آن به خاصیت توزیع‌پذیری می‌رسد.

توصیه‌های آموزشی

۱ در نمایش ماتریس‌ها به‌صورت آرایش مستطیلی سعی شود از خواص مختلف اعداد نظیر توان و ضرب استفاده شود تا دانش‌آموز بتواند به کمک روابط بین درایه‌ها، درایه‌های ماتریس را مشخص کند.

۲ در تساوی ماتریس‌ها می‌توانید از معادلات استفاده کنید. معادلات درجه ۱ یا ۲

۳ در تعریف انواع ماتریس، اجازه دهیم دانش‌آموزان خودشان مثالی از انواع ماتریس ارائه دهند.

۴ کار در کلاس را اجازه دهید دانش‌آموزان حل کنند و خودشان به نتیجه خواسته شده برسند.

۵ بیان خواص ماتریس به‌صورت کلی را برای مواردی که در کتاب اشاره شده توصیه می‌کنیم.

۶ از نمونه مسائلی نظیر تمرینات صفحه ۲۰ و ۲۱ بیشتر استفاده شود. به‌خصوص مسائل شماره ۱، ۲، ۵، ۶، ۷ و ۱۱

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

۱ در نمایش ماتریس‌ها و درایه‌ها، جای سطر و ستون را اشتباه می‌گیرند برای رفع آن اجازه دهید در مسائل دانش‌آموز درایه‌ها را مشخص کند.

۲ ضرب ماتریس‌ها یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان است.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg+ce+dg & af+bh+cf+hd \\ af+bh+ce+dg & cf+bh+ae+bh \end{bmatrix}$$

از این نمونه و نمونه‌های مشابه این بسیار اشتباه می‌شود.

نمونه‌ای از اشتباهات دانش‌آموزان :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱\times۱ & ۳\times۲ \\ ۲\times-۱ & ۴\times-۴ \end{bmatrix}$$

۳ در ضرب عدد در ماتریس، دانش‌آموز عدد را فقط در یک سطر یا یک ستون ضرب می‌کند. مراقب باشیم این اتفاق نیفتد.

۴ در ضرب ماتریس‌های توانی، دانش‌آموز درایه‌ها را مانند اعداد به توان می‌رساند.

مانند :

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix} \to A^{۲} = \begin{bmatrix} ۹ & ۴ \\ ۱ & ۲۵ \end{bmatrix} \to A^{۳} = \begin{bmatrix} ۲۷ & ۸ \\ ۱ & ۱۲۵ \end{bmatrix}$$

۵ انواع ماتریس‌ها را با هم قاطی می‌کند. ماتریس اسکالر را به جای قطری و برعکس یاد می‌گیرد.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ ماتریس زیر را به‌صورت آرایش مستطیلی نشان دهید.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{۳\times۳} \ , \ a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{۲} & i=j \\ \frac{۱}{۲} & i<j \\ -۱ & i>j \end{cases}$$

$$B = \left[b_{ij}\right]_{۳\times۴} \ , \ b_{ij} = \left[i^{۲} - ۲i\times j\right]$$

۲ ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ab & ۴ \\ ۳ & a+b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ با هم برابرند $a^{۲}+b^{۲}$ را به‌دست آورید.

۳ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند مطلوب است :

الف) $A\times B$ ب) $(A+B)\times(A-B)$

پ) $۲A^{۲}\times ۳I$

۴ اگر $A=\left[i^{۲}-j\right]_{۲\times ۲}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{۲\times ۳}=\begin{cases} -۱ & i=j \\ ۰ & i<j \\ ۲ & i>j \end{cases}$ باشد حاصل $A\times B$ را به‌دست آورید.

۵ دو ماتریس ۲ ×۲ مثال بزنید و به کمک آن نشان دهید $A+B=B+A$

۶ اگر $[۲x]\begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}=۰$ باشد مقدار x را به‌دست آورید.

۷ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $A^{۵}-A^{۴}$ را بیابید.

۸ ماتریس اسکالری مانند $A=[a_{ij}]$ از مرتبه ۳ مثال بزنید که $a_{۳۳}+a_{۳۲}=-۲$ باشد.

۹ اگر حاصل‌ضرب دوماتریس A و B صفر باشد. حداقل یکی از ماتریس‌ها، ماتریس صفر است. به کمک یک مثال نقض نادرستی حکم فوق را بیان کنید.

۱۰ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد و $A^{۲}=\alpha A+\beta I$ مقدار α و β را بیابید.

۱۱ ماتریس قطری مانند $B=[b_{ij}]$ از مرتبه ۳ مثال بزنید. که در آن $b_{ij}=[i+j]$ باشد. سپس حاصل $B^{۳}$ را به‌دست آورید.

۱۲ با یک مثال نقض نشان دهید که ضرب ماتریس‌های مربعی ۲×۲ خاصیت جابه‌جایی ندارد.

۱۳ اگر A و B ماتریس ۳ ×۳ تعویض‌پذیر باشند ثابت کنید.

$(A-B)^{۲}=A^{۲}-۲AB+B^{۲}$

۱۴ برای هر ماتریس مربعی A و همانی I که I با A هم‌مرتبه است ثابت کنید.

$(A+I)^{۲}=A^{۲}+۲A+I$

درس دوم
وارون ماتریس و دترمینان

اهداف درس دوم

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند :

۱ آشنایی با وارون ماتریس و تعریف آن

۲ مشخص کردن ماتریس‌های وارون‌پذیر (نامفرد) و وارون ناپذیر (منفرد) و شرط وارون‌پذیری ماتریس

۳ پیداکردن وارون ماتریس‌های نامنفرد

۴ حل دستگاه‌ها به کمک وارون ماتریس و پیداکردن جواب آنها

۵ به‌دست آوردن دترمینان ماتریس‌های ۲×۲ و ۳×۳

۶ آشنایی با ویژگی‌های دترمینان و کاربرد دترمینان

روش تدریس درس دوم

ابتدا در مورد وارون اعداد حقیقی صحبت شود و مشخص کنید که همه اعداد حقیقی وارون ندارند. سپس ۲ ماتریس که وارون یکدیگر هستند را در هم ضرب کنید تا به ماتریس همانی برسید. از دانش‌آموزان بخواهید برای یک ماتریس خاص، ماتریسی بیابند که حاصل‌ضرب آنها برابر ماتریس همانی شود. سپس مبحث وارون را بیان کنید. همانند مسئله صفحه ۲۲ مثال حل کنید.

پرسش متن صفحه ۲۳ بالای صفحه برای آشنایی با وارون ماتریس است.

پرسش متن صفحه ۲۳ (وسط صفحه) را دانش‌آموز حل کند و به این نتیجه برسد که $(A^{-1})^{-1} = A$

چند نمونه ماتریس مثال بزنید و از دانش‌آموزان خواسته شود. آنها را حل کند و وارون ماتریس را بیابند در این مثال‌ها، ماتریس‌هایی مثال بزنید که وارون نداشته باشند.

قضیه صفحه ۲۳ برای دانش‌آموزان ثابت شود و به آنها گفته شود که ماتریس در صورت وارون‌پذیر بودن فقط یک وارون دارد.

فعالیت صفحه ۲۴ اشاره به حل دستگاه ۲×۲ به کمک وارون ماتریس است. یک نمونه حل کنید و اجازه دهید فعالیت را دانش‌آموزان حل کنند و مهارت حل دستگاه‌ها به کمک وارون ماتریس را بیابند و مراقب باشید که از شیوهٔ حذفی استفاده نکنند. ماتریس ضرایب، ماتریس مجهول و ماتریس معلوم را از روی

دستگاه مشخص کنید و برعکس دستگاه را به‌صورت ماتریس بیان کنید و اجازه دهید دانش‌آموزان ماتریس را به‌صورت دستگاه حل کنند.

حالت‌های مختلف دستگاه را درنظر بگیرید و اجازه دهید دانش‌آموزان دستگاه را حل کنند و مشخص کنند کدام دستگاه‌ها جواب دارند یا جواب ندارند یا بی‌شمار جواب دارند.

وضعیت دو خط در صفحه را برای آنها بیان کنید و مشخص کنید که حل دستگاه یعنی بررسی وضعیت دو خط در صفحه است.

رابطه بین تعداد جواب دستگاه‌ها و وضعیت خط در صفحه را توسط دانش‌آموزان بیابید. برای این کار، کار در کلاس صفحه ۲۶ بسیار کمک می‌کند.

تاریخچه‌ای در مورد دترمینان ماتریس بیان کنید و دترمینان ماتریس‌های ۲×۲ و ۳×۳ را بیابید. چندین نمونه مثال بیان کنید تا دانش‌آموزان دترمینان‌های آنها را مشخص کنند.

دستور ساروس را برای حل دترمینان ۳×۳ به‌عنوان یک مهارت به دانش‌آموزان بیان کنید و چند مثال بیان کنید.

مثال متن بالای صفحه ۲۹ سمت راست یک سؤال باز پاسخ است می‌خواهیم به دانش‌آموزان بگوییم ماتریس‌های زیادی با این شرایط وجود دارند. دقت شود که این سؤال جواب منحصر بفرد ندارد.

کار در کلاس صفحه ۲۹

در مورد ویژگی دترمینان ماتریس صحبت می‌کند در قسمت اول به این نتیجه می‌رسیم که $|AB| = |A||B|$ البته مثال را دانش‌آموزان خودشان حل کنند و به نتیجه برسند. چند نمونه مثال از این نمونه بیان شود.

قسمت ۲ کار در کلاس صفحه ۲۹

این مثال یک مسئله باز پاسخ است و شما در کلاس مثال‌های مختلفی را بیان کنید. اجازه دهید دانش‌آموزان این مثال را خودشان حل کنند $|A^2|=|A|^2$ و نتیجه بگیرید که $|A^n|=|A|^n$

قسمت ۳ کار در کلاس صفحه ۲۹

به کمک دستور ساروس و بسط به‌دست آورید. اجازه دهید دانش‌آموزان به این هدف برسند که دترمینان ماتریس قطری برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی.

قسمت ۴ کار در کلاس صفحه ۲۹

هدف اصلی $|KA_{۳}| = K^{۳}|A|$ می‌خواهیم دانش‌آموزان با حل مثال به این نتیجه برسند دقت شود که این نتیجه در کتاب نیامده ولی با دانش‌آموزان باید به این نتیجه برسیم که بعداً در تمرین ۸ صفحه ۳۱ نمونه‌ای از آن را می‌بینیم.

توصیه‌های آموزشی

۱ در پیدا کردن وارون ماتریس دقت شود که چند نمونهٔ اول، ماتریس‌هایی باشند که وارون‌پذیر باشند. سپس نمونه‌ای را بیان کنید که وارون‌پذیر نباشند.

۲ شرط وارون‌پذیری ماتریس بیان شود تا بدانند که کدام‌ها وارون‌پذیراند.

۳ پیداکردن وارون ماتریس را با الگو به آنها آموزش دهید.

۴ در حل دستگاه‌ها به کمک وارون ماتریس دقت شود دانش‌آموزان دنبال شیوه‌های حذفی نباشند.

۵ در تعداد جواب دستگاه به کمک مدل هندسی و تحلیلی ارتباط برقرار شود و دانش‌آموزان هر دو شیوه را بشناسند.

۶ اجازه دهید دانش‌آموزان در به‌دست آوردن دترمینان ۳×۳ از شیوه بسط استفاده کنند چند مورد به‌صورت اجباری از آنها بخواهید که به کمک بسط به‌دست آورند. سپس از شیوه ساروس استفاده کنند.

۷ کار در کلاس‌ها به‌دقت حل شود تا به نتایج و اهداف درس برسند.

۸ برخی از ویژگی دترمینان به‌صورت کار در کلاس مطرح شده با حل آن کار در کلاس‌ها ویژگی و نتایج را پررنگ بیان کنید.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

۱ در به‌دست آوردن وارون ماتریس $\frac{۱}{|A|}$ را دانش‌آموزان فراموش می‌کنند و فقط به ماتریس الحاقی فکر می‌کنند.

۲ شرط وارون‌پذیری را در نظر نمی‌گیرند و از هر ماتریس وارون می‌گیرند.

۳ دانش‌آموزان باید بدانند که ماتریس‌های غیرمربعی وارون‌پذیر نیستند و در مورد آنها از وارون استفاده نمی‌شود.

۴ در حل دستگاه‌ها، دانش‌آموزان ماتریس ضرایب را با مجهول می‌نویسند.

$$\begin{cases} ۲x+۳y=۴ \\ x-۲y=۷ \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} ۲x & ۳y \\ x & -۲y \end{bmatrix}$$

۵ در حل دستگاه به کمک وارون ماتریس، شرط جواب داشتن را رعایت نمی‌کنند و دستگاه‌های فاقد جواب به‌دنبال جواب می‌گردند.

۶ در به‌دست آوردن دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad-bc$ منفی بین را فراموش می‌کنند و با هم جمع می‌کنند. $ad+bc$ را محاسبه می‌کنند.

۷ در محاسبه دترمینان ۳×۳ به کمک بسط (۱−) را به توان ij نمی‌رسانند و اشتباه، از این نمونه زیاد هست.

۸ در ویژگی دترمینان دانش‌آموزان احساس می‌کنند چون $|AB|=|A||B|$ پس دترمینان $|A\pm B|=|A|\pm|B|$

۹ در محاسبه دترمینان $|KA|$ دانش‌آموزان $K|A|$ را محاسبه می‌کنند.

۱۰ در شیوه ساروس :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & g \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

درایه‌ها را اشتباهی در هم ضرب می‌کنند و کنار هم درست قرار نمی‌دهند و عددها اشتباه حساب می‌شود و یا برعکس حساب می‌کنند یعنی.

$$(ceg+afh+bdg)-(aeg+bfg+cdh)$$

نمونه سؤال‌های ارزشیابی (۱)

۱ مقدار a را طوری بیابید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} a+۱ & ۱ \\ ۲ & a+۲ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر باشد.

۲ اگر ماتریس‌های A و B وارون‌پذیر نباشند حاصل $A\times B$ کدام است.

$$A=\begin{bmatrix} a+۲ & ۳ \\ a & -۴ \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} ۱-b & ۲ \\ -b & ۳ \end{bmatrix}$$

۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد. حاصل $A-A^{-۱}$ را به‌دست آورید.

۴ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد نشان دهید $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$

۵ ماتریسی مانند A بیابید به‌طوری‌که $A\times\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد.

۶ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -\tan x \\ \tan x & ۱ \end{bmatrix}$ باشد. حاصل $|A^{-۱}|$ را به‌دست آورید.

۷ اگر دترمینان ماتریس A با دترمینان ماتریس وارون A برابر باشد. نشان دهید که دترمینان A برابر مثبت یا منفی یک است.

۸ برای ماتریس مربعی A، $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و عدد حقیقی ۴ نشان دهید.

$(۴A)^{-۱}=\frac{۱}{۴}A^{-۱}$

۹ اگر $A=[i^{۲}-۲j]$ و ماتریس ۲×۲ باشد. آیا $A^{-۱}$ وجوددارد؟ چرا؟ در صورت وجود وارون، وارون آن را بیابید.

۱۰ برای ماتریس مربعی $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ نشان دهید $(A^{-۱})^{-۱}=A$

۱۱ اگر $A=\begin{bmatrix} |A| & ۲ \\ ۳ & |A| \end{bmatrix}$ باشد.

الف) ماتریس Aای را مشخص کنید که مجموعه درایه‌های آن ۷ باشد.

ب) از بین ماتریس A، ماتریس قطری A را بیابید.

۱۲ دستگاه $\begin{cases} ۲x+۳y=۴ \\ ۵x+۶y=۷ \end{cases}$ را به کمک وارون ماتریس حل کنید.

۱۳ اگر دستگاه $\begin{cases} ax+۳y=۲ \\ a^{۲}x+(a+۲)y=۵ \end{cases}$ جواب نداشته باشد مقدار a را بیابید.

۱۴ اگر در حل دستگاه $\begin{cases} ax+by=۴ \\ cx+dy=-۵ \end{cases}$ به کمک وارون ماتریس، $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}$ ماتریس وارون ضرایب باشد. مقدار $x+y$ را به‌دست آورید.

۱۵ اگر A و B از مرتبه ۲ و وارون‌پذیر باشند. نشان دهید $A \times B$ وارون‌پذیر است.

۱۶ با یک مثال نقض نشان دهید. برای دو ماتریس مربعی A و B و هم مرتبه $|A+B| = |A| + |B|$ برقرار نیست.

۱۷ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد. حاصل دترمینان $۲A^۲$ کدام است.

۱۸ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد. سطر اول ماتریس A را در ۲ ضرب می‌کنیم و B می‌نامیم و ستون سوم ماتریس A را در ۲ ضرب می‌کنیم و C می‌نامیم. نشان دهید دترمینان B و C با هم برابرند و ۲ برابر دترمینان A هستند.

۱۹ اگر A یک ماتریس قطری از مرتبه ۳ باشد که هر درایه آن به‌صورت $a_{ij} = [i-۲j]$ آنگاه حاصل $|A^۳|$ کدام است.

۲۰ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد. دترمینان $A \times B$ کدام است.

۲۱ اگر A یک ماتریس اسکالر به‌صورت $۳I$ و ۳×۳ باشد. حاصل دترمینان $|A|A$ را به‌دست آورید.

۲۲ ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ d & e & f \end{bmatrix}$ نشان دهید دترمینان ماتریس A صفر است. چه نتیجه‌ای می‌گیرید. آن را بیان کنید.

۲۳ اگر $A = \begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$ باشد و ماتریس A وارون‌پذیر باشد. آنگاه $(|A|^۲-۲)$ چقدر است؟

حل تمرین‌های صفحه ۲۰

۳ ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲&-۲&-۲\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}$ آنگاه

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲&-۲&-۲\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

۴ ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۶\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&۰\\۵&۲\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۵&۲\\۳&۱\end{bmatrix}$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۶\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&۰\\۵&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱&۴\\۳۳&۱۲\end{bmatrix}$$

$$A\times C=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۶\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۵&۲\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱&۴\\۳۳&۱۲\end{bmatrix}$$

$A\times B=A\times C$ اما ماتریس‌های B و C برابر نیستند.

۵

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=I\times A=A=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۷}=A^{۶}\times A=(A^{۲})^{۳}\times A=I^{۳}\times A=I\times A=A$$

۸

$$B=\left[b_{ij}\right]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}b_{۱۱}&b_{۱۲}&b_{۱۳}\\b_{۲۱}&b_{۲۲}&b_{۲۳}\\b_{۳۱}&b_{۳۲}&b_{۳۳}\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}r_{۱}&۰&۰\\۰&r_{۲}&۰\\۰&۰&r_{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{۱۱}&b_{۱۲}&b_{۱۳}\\b_{۲۱}&b_{۲۲}&b_{۲۳}\\b_{۳۱}&b_{۳۲}&b_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{۱}b_{۱۱}&r_{۱}b_{۱۲}&r_{۱}b_{۱۳}\\r_{۲}b_{۲۱}&r_{۲}b_{۲۲}&r_{۲}b_{۲۳}\\r_{۳}b_{۳۱}&r_{۳}b_{۳۲}&r_{۳}b_{۳۳}\end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم اگر یک ماتریس قطری، در یک ماتریس هم مرتبه خودش ضرب شود آنگاه درایهٔ a_{11} ماتریس قطری در تمام درایه‌های سطر اول b_{1j} ماتریس B ضرب می‌شود و به همین ترتیب درایه a_{22} در تمام درایه‌های سطر دوم ماتریس B یعنی b_{2j} ضرب می‌شود. ....

۹ الف) $A=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ آنگاه

$$A\times B=\begin{bmatrix} kb_{11} & kb_{12} & kb_{13} \\ kb_{21} & kb_{22} & kb_{23} \\ kb_{31} & kb_{32} & kb_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A\times B=(kI)B=k(IB)=kB$$

$$A\times B=(kI)B=k(IB)=kB$$

$$B\times A=B\times kI=k(BI)=kB$$

ب) بله $A\times B=B\times A$

۱۰

$$(A+B)^2=(A+B)\times(A+B)=A^2+AB+BA+B^2 \xrightarrow{AB=BA} A^2+2AB+B^2$$

حل تمرین‌های صفحه ۳۰ کتاب

۳

$$|A|=5|A|\times 4|A|^2-5|A| \Rightarrow 20|A|^3-6|A|=0$$

$$\Rightarrow 2|A|(10|A|^2-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} |A|=0 \rightarrow |A|^3-2=-2 \\ |A|=\pm\dfrac{\sqrt{30}}{10} \rightarrow |A|^3-2=\begin{cases} \dfrac{3\sqrt{30}-200}{100} \\ \dfrac{-3\sqrt{30}-200}{100} \end{cases} \end{cases}$$

۴

$$|A|=d\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}+e(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}+f(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}=0$$

اگر دو سطر ماتریس برابر باشد. دترمینان ماتریس صفر است.

۸ الف)

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \Rightarrow |A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

$$|B|=\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} ka & kb \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \Rightarrow |B|=(kaei+kbfg+kcdh)-(kceg+kafh+kbdi)$$

$$|B|=k((aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi))=k|A|$$

نتیجه می‌گیریم.

اگر یک سطر یک ماتریس در عدد k ضرب شود دترمینان آن ماتریس در همان عدد ضرب می‌شود.

۹

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$|A|=ad-bc,\ |B|=k^{۲}ad-k^{۲}cb=k^{۲}(ad-bc)=k^{۲}|A|$$

نتیجه می‌گیریم اگر همه درایه‌های یک ماتریس ۲×۲ را در یک عدد k ضرب کنیم آنگاه دترمینان آن ماتریس در $k^{۲}$ ضرب می‌شود.

۱۰ $||A|A|=|A|^{۳}\times|A|=|A|^{۴}=۵^{۴}=۶۲۵$

۱۲ شرط جواب منحصربه‌فرد این است که دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد یعنی :

$$A=\begin{bmatrix} k & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} \rightarrow |A|=-۲k-۳\neq ۰ \Rightarrow k\neq -\frac{۳}{۲}$$

۱۳ الف) دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه را به‌دست می‌آوریم.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=۳+۱۰=۱۳\neq ۰$$

دستگاه یک جواب منحصربه‌فرد دارد که آن جواب به‌صورت زیر است.

$$X=A^{-۱}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۳۹ \\ ۲۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ y=۲ \end{cases}$$

ب) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & -۶ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -۶+۶=۰$

دستگاه جواب منحصربه‌فرد ندارد. اما برای مشخص کردن اینکه جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد می‌توان به‌صورت هندسی بررسی کرد یعنی :

$$\frac{۱}{-۲}=\frac{۳}{-۶}\neq\frac{۵}{۱}$$

پس دستگاه جواب ندارد زیرا خطوط فقط موازی‌اند.

پ) $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۴ & -۶ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۱۲-۱۲=۰$

دستگاه جواب منحصربه‌فرد ندارد یا جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد برای مشخص کردن به‌صورت هندسی عمل می‌کنیم یعنی :

$$\frac{-۲}{۴}=\frac{۳}{-۶}=\frac{۲}{-۴}$$

پس دو خط منطبق هستند یعنی دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی (۲)

۱ اگر $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & b \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & -۱ \\ d & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $a+b+c+d$ کدام است؟

الف) ۲-　　ب) ۱-　　پ) ۳　　ت) ۵

۲ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ m & ۱ \end{bmatrix}$ و $A^۲=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ -۶ & a_{۲۲} \end{bmatrix}$ باشد، m را بیابید؟

۳ اگر $A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۵ & ۲ \\ ۷ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=A\times B=[C_{ij}]$ آنگاه حاصل $C_{۲۳}$ کدام است؟

الف) صفر　　ب) ۱۶　　پ) ۲۲　　ت) ۲۴

۴ جواب‌های معادله $\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$ را بیابید؟

۵ اگر $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & x & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

الف) ۵-　　ب) ۴-　　پ) ۴　　ت) ۵

۶ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۷ - A^۴$ را به‌دست آورید؟

۷ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A^۲ = \alpha A + \beta I_۲$ دوتایی (α , β) کدام است؟

الف) (۲, ۱۱)　　ب) (۱۳ , ۲)　　پ) (۱۱ , ۴)　　ت) (۱۳, ۴)

۸ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۵ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ آنگاه، $A^۲ - A$ را بیابید؟

۹ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

الف) $B^۲ \times A = A$　　ب) $B \times A = I$　　پ) $B \times A = A \times B$　　ت) $B^۲ \times A = I$

۱۰ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ماتریس $(A - I)^۲$ را بیابید؟

۱۱ در ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $(A+B)^۲$ برابر است با :

الف) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$　　ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$　　پ) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$　　ت) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۱۲ در ماتریس‌های $A = B + C$ حاصل $A^{۲} + B^{۲} - AB - BA$ را به دست آورید؟

۱۳ در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^{n} - A^{n-۱}$ کدام است؟

الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۲^{n-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ پ) $\begin{bmatrix} ۲^{n-۱} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ت) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۱۴ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B \cdot A^{n} = \begin{bmatrix} ۴ & ۴۱ \\ ۳ & ۳۲ \end{bmatrix}$ در این صورت n را بیابید :

۱۵ در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ حاصل جمع درایه‌های $A + A^{۲} + A^{۳} + A^{۴}$ کدام است؟

الف) ۴ ب) ۳ پ) ۱۲ ت) ۶

۱۶ اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^{۵}$ را به دست آورید.

۱۷ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ در ماتریس $A^{۴}$ حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی کدام است؟

الف) ۳۲ ب) ۶۴ پ) ۱۲۸ ت) ۲۵۶

۱۸ چند ماتریس مانند $A_{۲\times۲}$ وجود دارد که $A \times \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۸ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد؟

۱۹ اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های $A^{۲} + A + I$ کدام است؟

الف) ۲۷ ب) ۲۶ پ) ۲۵ ت) ۲۴

۲۰ به ازای کدام مقدار k معادله دترمینان $\begin{vmatrix} x & ۰ & k \\ ۱ & x+۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & x+۲ \end{vmatrix} = ۰$ فقط یک ریشه دارد؟

۲۱ اگر a, b دو عدد حقیقی و i و j شمارهٔ سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس $A = \left[a_i + b_j\right]_{۳\times۳}$ کدام است؟

الف) صفر　　ب) $a+b$　　پ) $a \times b$　　ت) $ab(a+b)$

۲۲ با توجه به معادله $\begin{vmatrix} x & -۲x & -۱ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۰ & -۳ \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} ۱ & -۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۳ \\ -۱ & ۴ & ۵ \end{vmatrix} = ۸$ مقدار x را بیابید؟

۲۳ اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & -۲ \\ ۵ & -۱ & ۶ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $\frac{۱}{۲}A^۳$ کدام است؟

الف) ۳۲　　ب) ۶۴-　　پ) ۱۶　　ت) ۱۲۸-

۲۴ اگر $A = \left[(i-j)\right]_{۳\times۳}$ ، دترمینان ماتریس $\frac{۱}{۴}A$ را بیابید؟

۲۵ اگر حاصل دترمینان روبه‌رو ۶ باشد، a کدام است؟ $\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & a \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -a \end{vmatrix}$

الف) ۳-　　ب) ۲-　　پ) ۲　　ت) ۳

۲۶ اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۷ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|AB|+۲|A+B|$ را بیابید؟

۲۷ دو سطر یک ماتریس مربع را در عدد ۳ و سه ستون آن را در ۲- ضرب کرده‌ایم. دترمینان ماتریس حاصل چند برابر دترمینان ماتریس اولیه است؟

الف) ۷۲　　ب) ۶۴　　پ) ۶۴-　　ت) ۷۲-

۲۸ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ & -۴ \\ ۳ & ۰ & -۴ \\ ۳ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$ مقدار دترمینان $|A|$ را بیابید؟

۲۹ ماتریس A از مرتبه ۳ است. اگر مقدار دترمینان A برابر ۳ باشد، دترمینان ماتریس $۳A$ کدام است؟

الف) ۶ ب) ۹ پ) ۲۷ ت) ۸۱

۳۰ حاصل $\begin{vmatrix} a & ۰ & a \\ ۰ & a & ۰ \\ a & ۰ & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ۰ & b & ۰ \\ b & ۰ & b \\ ۰ & b & ۰ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۳۱ با فرض آنکه $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ & -۱ \\ x & ۱ & ۲ \end{vmatrix}=a+x\begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}$ مقدار a کدام است؟

الف) ۸- ب) ۸ پ) ۴ ت) ۴-

۳۲ اگر A یک ماتریس ۲ × ۲ باشد، که $۲A+I_۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان ماتریس A را به دست آورید؟

۳۳ اگر بدانیم $A^{-۱}+I=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ آنگاه حاصل دترمینان ماتریس $A+I$ کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۷}{۳}$ پ) $\frac{۳}{۷}$ ت) ۱-

۳۴ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\begin{vmatrix} x & ۱ & ۵ \\ x & x & ۲ \\ x & x & x \end{vmatrix}=۰$ را به دست آورید؟

۳۵ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$ ، $AA^{-۱}$ کدام ماتریس است؟

الف) صفر ب) همانی پ) $\begin{bmatrix} ۰ & ۸ \\ ۸ & ۰ \end{bmatrix}$ ت) $\begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}$

۳۶ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه جواب معادله $AX=B$ را به دست آورید؟

۳۷ اگر $\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۶ & ۱۴ \end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A کدام است؟

الف) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۷ & -۱ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۷ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ پ) $\begin{bmatrix} ۷ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ ت) $\begin{bmatrix} -۷ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$

۳۸ اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۷ & ۶ \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس A را بیابید؟

۳۹ اگر $A^{-۱}=۲\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ دترمینان $۳A^{۲}$ را بیابید؟

۴۰ هرگاه $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مقدار دترمینان ماتریس $|A|\times A^{۲}$ را بیابید؟

۴۱ هرگاه $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $(۲A)^{-۱}$ را بیابید؟

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۱}{۱۸}$ پ) $\frac{۱}{۶}$ ت) $\frac{۱}{۱۲}$

۴۲ در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=f \\ cx+dy=۱ \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهول به‌صورت $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ است. اگر $x=۱$، مقدار y کدام است؟

۴۳ از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ، سطراول ماتریس A کدام است؟

الف) $[-۱۷ \quad ۱۲]$ ب) $[۳۰ \quad -۲۱]$ پ) $[۳۰ \quad -۱۷]$ ت) $[-۲۱ \quad ۱۲]$

۴۴ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $\frac{۱}{۲}A^{۲}+A^{-۱}$ را بیابید؟

۴۵ اگر A یک ماتریس ۲×۲ معکوس‌پذیر باشد و در رابطهٔ $A^{۲}=۳A+I$ صدق کند، دترمینان ماتریس $A-A^{-۱}$ را به دست آورید؟

۴۶ درکدام گزینه $A=A^{-۱}$ است؟

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ پ) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ت) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۴۷ کدام نادرست است؟ (A مربع مرتبه ۲)

الف) $(A^{۲})^{-۱}=(A^{-۱})^{۲}$ ب) $(\det A)^{۲}=\det A^{۲}$

پ) $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$ ت) $(AB)^{-۱}=A^{-۱}B^{-۱}$

۴۸ به ازای کدام مقدار a، دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x+۳y=۴ \\ y=a\times(x-۲) \end{cases}$ بی‌نهایت جواب دارد؟

۴۹ اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x+my=۱ \\ (m-۱)x+y=۳ \end{cases}$ جواب نداشته باشد، m کدام است؟

الف) ۱-, ۲- ب) ۱ , ۲- پ) ۱- , ۲ ت) ۱ , ۲

۵۰ مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} (۲m-۱)x-۲y=۰ \\ -۵x+(m-۱)y=۰ \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد؟

۵۱ اگر دستگاه $\begin{cases} mx-۲y=۳ \\ ۶x-۳my=n \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

الف) ۱۱- ب) ۱۳- پ) ۲۲ ت) $\frac{۱۷}{۲}$

۵۲ در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=۲ \\ cx+dy=-۱ \end{cases}$، وارون ماتریس ضرایب به‌صورت $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است. x + y را بیابید؟

	۱	۲	۳	۴
۱-	○	○	○	●
۲-	●	○	○	○
۳-	○	○	●	○
۴-	○	○	●	○
۵-	○	○	●	○
۶-	○	●	○	○
۷-	○	●	○	○
۸-	●	○	○	○
۹-	●	○	○	○
۱۰-	○	○	○	●
۱۱-	○	○	●	○
۱۲-	○	●	○	○
۱۳-	○	●	○	○
۱۴-	○	○	○	●
۱۵-	●	○	○	○
۱۶-	○	○	●	○
۱۷-	○	○	○	●
۱۸-	○	○	●	○
۱۹-	●	○	○	○
۲۰-	○	●	○	○
۲۱-	●	○	○	○
۲۲-	●	○	○	○
۲۳-	○	●	○	○
۲۴-	○	○	○	●
۲۵-	○	●	○	○
۲۶-	●	○	○	○

	۱	۲	۳	۴
۲۷-	○	○	○	●
۲۸-	○	●	○	○
۲۹-	○	○	○	●
۳۰-	○	○	○	●
۳۱-	●	○	○	○
۳۲-	○	●	○	○
۳۳-	○	○	●	○
۳۴-	○	○	●	○
۳۵-	○	●	○	○
۳۶-	○	○	○	●
۳۷-	○	○	○	●
۳۸-	●	○	○	○
۳۹-	○	●	○	○
۴۰-	○	○	●	○
۴۱-	○	○	○	●
۴۲-	●	○	○	○
۴۳-	○	○	○	●
۴۴-	○	●	○	○
۴۵-	○	○	○	●
۴۶-	○	●	○	○
۴۷-	○	○	○	●
۴۸-	○	●	○	○
۴۹-	○	○	●	○
۵۰-	○	○	○	●
۵۱-	●	○	○	○
۵۲-	○	○	○	●

فصل دوم

آشنایی با مقاطع مخروطی

نگاه کلی به فصل

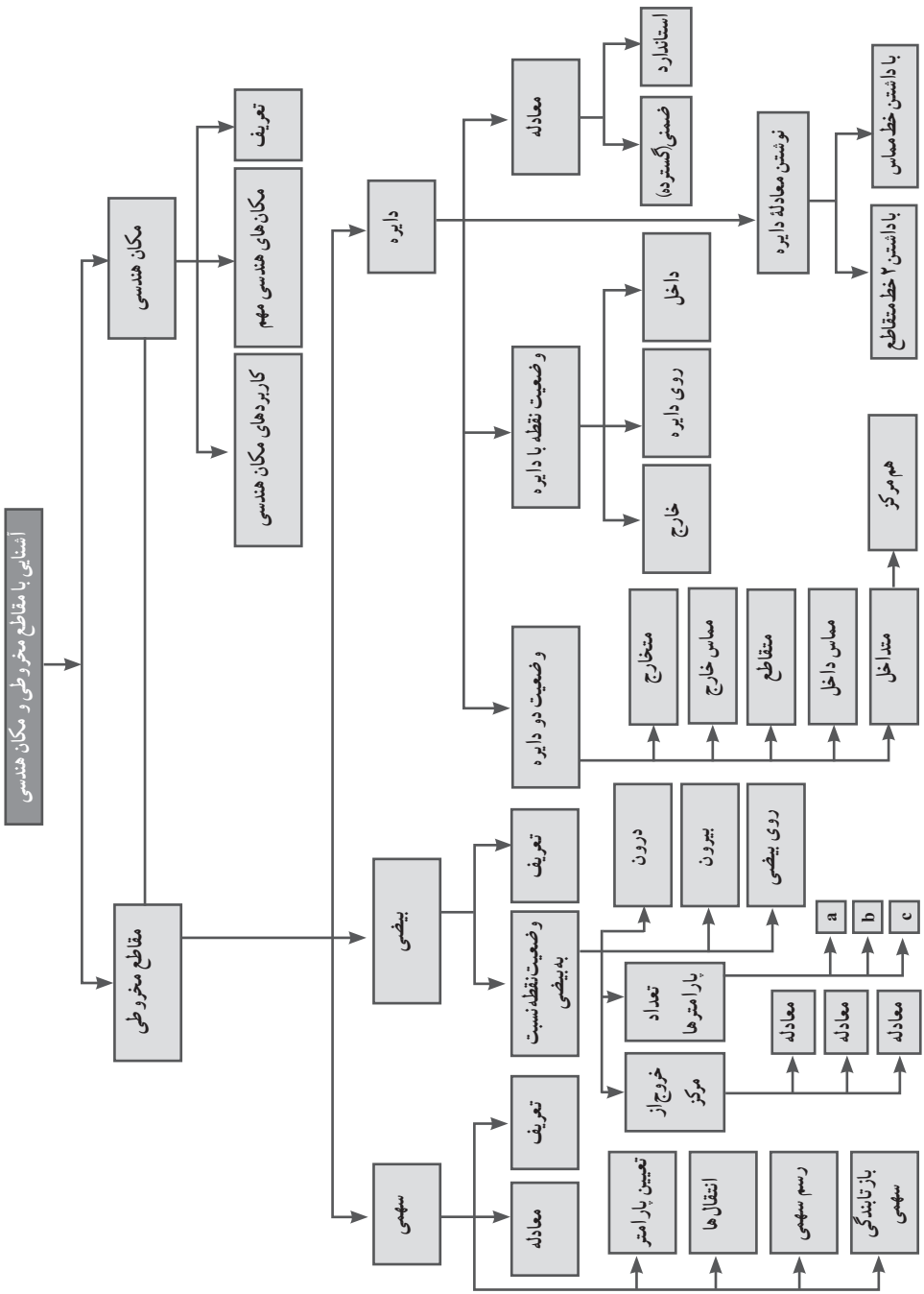
این فصل را می‌توان فصلی برای معرفی و بررسی مقاطع مخروطی در حالت کلی، بدون ریز شدن در جزئیات و با اجتناب از نکات خاص و غیر کاربردی دانست.

در شکل‌های ابتدایی فصل، به‌طور شهودی، فصل مشترک صفحات مختلف با سطح مخروطی نشان داده شده است که نتیجه آن به‌وجود آمدن چهار مقطع مهم دایره، بیضی، هذلولی و سهمی می‌باشد. البته در همان اشکال شکل‌های دیگری نیز که از برخورد صفحه و سطح مخروط در حالت‌های خاص رُخ می‌دهد به تصویر کشیده شده است تا بررسی کامل‌تر باشد.

اما برای درک صریح‌تر این موضوع لازم است دانش‌آموزان مفهوم مکان هندسی را به خوبی متوجه شوند که در ادامهٔ قسمت اول به بررسی این مفهوم پرداخته شده است. مثال‌های متعدد در زمینهٔ مکان هندسی‌های مهم از جمله در نیمساز، عمودمنصف، تعیین فاصله‌ها و... به خوبی دانش‌آموزان را به درک بیشتری از مفهوم هندسی به‌عنوان مجموعه‌ای از نقاط که یک ویژگی مشترک دارند می‌رساند.

در ادامهٔ فصل و بعد از تثبیت مفهوم مکان هندسی، بررسی مفصل و دقیق مقاطع دایره، بیضی و سهمی انجام شده است. دایره و سهمی با دقت و حوصلهٔ بیشتری بررسی شده‌اند و علّت آن را می‌توان در سلسله مباحث متصل با این دو مقطع در سال‌های گذشته نیز جست‌وجو کرد. دایره و سهمی به شکل‌های مختلف در سال‌های قبل نیز بررسی شده‌اند و در کتاب حاضر بررسی آنها با رویکرد تعریفی کامل‌تر و دقیق‌تر انجام شده است. در مورد بیضی، این بررسی به شکل محدودتری انجام شده است و کتاب وارد جزئیات از جمله معادله به شکل تحلیل بیضی نشده است. تعاریف اولیه بیضی و تعیین پارامترها از جمله مواردی هستند که بررسی آنها درک شهودی مناسبی برای فراگیر ایجاد خواهد کرد و در این کتاب و این فصل به آنها پرداخته شده است.

نقشه مفهومی


آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی
مکان هندسی
مقاطع مخروطی
تعریف
مکان‌های هندسی مهم
کاربردهای مکان هندسی
دایره
معادله
استاندارد
ضمنی (گسترده)
نوشتن معادلهٔ دایره
با داشتن خط مماس
با داشتن ۲ خط متقاطع
وضعیت نقطه با دایره
داخل
روی دایره
خارج
هم مرکز
وضعیت دو دایره
متخارج
مماس خارج
متقاطع
مماس داخل
متداخل
بیضی
تعریف
وضعیت نقطه نسبت به بیضی
درون
بیرون
روی بیضی
پارامترها
خروج از مرکز
معادله
معادله
معادله
a
b
c
سهمی
تعریف
معادله
تعیین پارامتر
انتقال ها
رسم سهمی
بازتابندگی سهمی

تصویر ابتدای فصل (تصویر عنوانی)

مقاطع مخروطی از جمله اشکالی هستند که کاربردهای خاصّی در معماری دارند. در بناهای تاریخی استفاده از شکل‌های مختلف مقاطع مخروطی دیده می‌شود. تصویر ابتدایی به همین موضوع پرداخته است و مشخص می‌کند در بُرج طغرُل چطور از ویژگی نورپردازی و ترکیب دایره و بیضی در آن می‌توان زمان را تعیین کرد. البته استفاده از مخروط و مقاطع مخروطی همیشه یکی از کاربردهای جالب در تعیین زمان و استفاده در ساعت‌های شنی بوده است.

دانستنی‌های برای معلم

مقاطع مخروطی در ریاضیات و کاربردهای عملی جایگاه قابل قبولی دارد. در گذشته و به خصوص دورهٔ اسلامی مطالعات زیادی از طرف دانشمندان برای رابطهٔ بین مقاطع مخروطی و ساعت‌های آفتابی انجام شده بود امّا صنعتگران معمولاً ساعت‌های آفتابی را براساس جدول‌هایی می‌ساختند که موقعیت سایهٔ شاخص را برای مکانی معین و تمام موقعیت‌های خورشید به‌دست می‌داد.

برخی از منجمان قرن‌های چهارم و پنجم هجری، چون صاغانی و بیرونی، به کمک مقاطع مخروطی دربارهٔ انواع مختلف اُسطرلاب بحث کرده‌اند. ساخت و کاربرد این اُسطرلاب‌ها بسیار دشوارتر از اُسطرلاب معمولی است که در آن فقط خط مستقیم و دایره به‌کار رفته است؛ کاربرد مقاطع مخروطی در نور شناخت مهم‌تر است. در دورهٔ باستان، هندسه‌دانان آینه‌هایی سوزان سهمی‌گون را مطالعه کردند و هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی این پژوهش را ادامه دادند. ابن میثم یک مسئلهٔ معروف نور شناخت را با مقاطع دایره و هذلولی حل کرد.

از مقاطع مخروطی در حل مسائل خاصی از هندسه و حتّی معادلات استفاده شده است. ماهانی که در حدود ۲۴۶ قمری زندگی می‌کرد نخستین کسی است که مسئله‌ای هندسی را به معادلهٔ جبری درجهٔ سوم تحویل کرده است و سپس در حوالی سال ۳۲۸ قمری ابوجعفر خازن معادلهٔ ماهانی را به کمک مقطع مخروطی حل کرد. پس از او اغلب ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی معادله‌های درجهٔ سوم را به کمک مقاطع مخروطی حل کردند.

نمونه سؤال ارزشیابی

■ دایره

۱ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزاش $O(۱,۴)$ بوده و از نقطهٔ $A(۲,-۱)$ بگذرد.

۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(۱,۳)$ و $B(-۳,-۱)$ دو سر قطری آن باشند.

۳ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $x+۲y=۱$ مماس بوده و مرکزاش نقطهٔ $O(-۱,۳)$ باشد.

۴ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خطوط $۲x+y=۲$ و $۲x+y=۵$ مماس بوده و مرکزاش روی خط $y=x-۲$ باشد.

۵ به‌ازای کدام مقدار m رابطهٔ $۲x^۲+۲y^۲-x+y-۲m+۱=۰$ مشخص‌کنندهٔ یک دایره است؟

۶ اگر $x^۲+y^۲+(m-۱)x+(m+۲)y+m=۰$ تنها مشخص‌کنندهٔ یک نقطه در صفحه باشد m کدام است؟

۷ وضعیت نقاط زیر را نسبت به دایره‌های داده شده بررسی کنید.

الف) $x^۲+y^۲-۴x=۰$, $A(۱,۳)$

ب) $x^۲+y^۲+۲y=۰$, $A(-۱,-۴)$

ج) $x^۲+y^۲-۲y-۱=۰$, $A(۰,-۳)$

۸ وضعیت خطوط زیر را نسبت به دایره‌های داده شده بررسی کنید.

الف) $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$, $x+y=۲$

ب) $۲x^۲+y^۲-x-۱=۰$, $x=y$

ج) $x^۲+y^۲+۴y=۱$, $y=۲x-۱$

۹ وضعیت دوایر زیر را نسبت به هم بررسی کنید.

الف) $x^۲+y^۲-۲x=۰$, $x^۲+y^۲+۴y=۰$

ب) $(x-۱)^۲+y^۲+۴x=۲$, $(y+۱)^۲+x^۲=۵$

ج) $x^۲+y^۲-۲y=۱$, $x^۲+y^۲+۲x=۱$

۱۰ اگر دایره $x^۲+y^۲-۲x=۵$ و دایره $(x+۱)^۲+y^۲=۴$ مماس داخل باشند، a را بیابید.

■ بیضی

۱۱ در یک بیضی طول قطر بزرگ سه برابر طول قطر کوچک بیضی است، خروج از مرکز بیضی را بیابید.

۱۲ اگر فاصلهٔ رأس کانونی بیضی تا کانون دورتر دو برابر فاصلهٔ آن تا کانون نزدیک‌تر باشد، خروج از مرکز بیضی را بیابید.

۱۳ بیضی که در آن $e=\frac{۱}{۲}$ و $b=۱$ است را رسم کنید.

۱۴ در یک بیضی خروج از مرکز $\frac{۱}{۳}$ است و فاصلهٔ کانون تا رأس دورتر کانونی ۵ است. فاصلهٔ رأس ناکانونی تا رأس کانونی را به‌دست آورید.

۱۵ نقاط $F\left|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}\right.$ و $F'\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ کانون‌های بیضی می‌باشند که خروج از مرکزاش $e=\frac{۲}{۵}$ است. بیضی را رسم کرده و مختصات رئوس آن را تعیین کنید.

۱۶ نقاط $A\left|\begin{matrix}۲\\۶\end{matrix}\right.$ و $A'\left|\begin{matrix}-۴\\۶\end{matrix}\right.$ رئوس کانونی بیضی هستند که در آن فاصلهٔ رأس کانونی تا کانون نزدیک‌تر ۱ است و مشخصات دیگر بیضی را به‌دست آورید و آن را رسم کنید.

۱۷ نقاط $B\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ و $B'\left|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}\right.$ رئوس ناکانونی بیضی هستند که در آن $e=\frac{۱}{۴}$ می‌باشد، مشخصات دیگر بیضی را به‌دست آورید و آن را رسم کنید.

۱۸ فاصلهٔ رأس ناکانونی بیضی تا یکی از کانون‌ها ۳ می‌باشد، اگر نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک ۵ به ۲ باشد، بیضی را رسم کنید.

■ سهمی

۱۹ معادلهٔ سهمی را مشخص کنید که نقطهٔ $S(-۲,۱)$ رأس آن باشد و خط $y=۴$ خط هادی آن شود.

۲۰ معادلهٔ سهمی را بنویسید که کانون آن $F(۴,۳)$ و خط هادی آن $x=۲$ باشد.

۲۱ ویژگی‌های سهمی $x^۲+۴y-۲x=۵$ را بیابید و آن را رسم کنید.

۲۲ ویژگی‌های سهمی $y^۲-۴x+۲y=۳$ را بیابید و آن را رسم کنید.

۲۳ اگر $F(۱,۴)$ کانون سهمی $x^۲-۲y+ay-۱=۰$ باشد، a را بیابید.

۲۴ در سهمی $y^۲=۲x$ نوری به سهمی بر راستای خط $y=۴$ می‌تابد، معادلهٔ بازتاب این خط نوری را مشخص کنید.

۲۵ خط $x=۲$ خط هادی و $F(۴,۱)$ کانون سهمی می‌باشد. یک طیف نوری در راستای خط محور xها بر سطح سهمی می‌تابد، معادلهٔ بازتاب را بنویسید.

درس اول
آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

اهداف

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند :

۱ مقاطع مختلف مخروطی را بشناسد.

۲ درک واضحی از مفهوم مکان هندسی داشته باشد.

۳ مکان‌های هندسی مهم مانند عمودمنصف، نیمساز و تعیین فاصله‌های مختلف را مرور کند.

۴ کاربردهایی از مفهوم مکان هندسی را در حل مسائل ریاضی و هندسی ببیند.

روش تدریس

در بخش اول تدریس، چهار مقطع مخروطی یعنی دایره، بیضی، سهمی و هذلولی به‌صورت تجسمی معرفی شده‌اند. با توجه به اهمیت تجسم فضایی در این قسمت که مربوط به مخروط می‌شود و انتقال این سطح مقطع به فضای دو بعدی و صفحه لازم است در درک شهودی دانش‌آموزان بسیار دقّت شود.

در بخش دوم تدریس، مفهوم مکان هندسی مورد بحث و بررسی قرار گیرد تا دانش‌آموز این مفهوم را به‌عنوان مجموع نقاط که دارای ویژگی‌های مشترک هستند درک کند. در فعالیت شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۳۶ به ویژگی نیمساز به‌عنوان یک مکان هندسی مهم پرداخته شود.

در این فعالیت دانش‌آموز علاوه بر یادآوری ویژگی‌های نیمساز یک زاویه، یاد می‌گیرد که این ویژگی‌ها چطور به مفهوم مکان هندسی مرتبط می‌شوند. در این فعالیت به دو شرطی بودن تعریف نیز دقّت شود که بسیار مهم است.

در فعالیت شمارهٔ ۲ به بررسی دایره پرداخته شود. این فعالیت در راستای مقاطع مخروطی بسیار مهم است. در این فعالیت تعریف دایره به شکل مکان هندسی مشخص می‌شود که براساس این تعریف در صفحات بعد معادله دایره نوشته می‌شود.

در فعالیت شمارهٔ ۳، باز هم فاصله به‌عنوان یک مکان هندسی مهم در نظر گرفته شده است. در این فعالیت مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط به یک فاصله‌اند تعیین می‌شود.

در ادامهٔ درس اول یکی از کاربردهای مکان هندسی بررسی می‌شود. در این قسمت ترکیبی از مکان هندسی‌های قبل بحث و بررسی می‌شود. مفهوم عمودمنصف و تعیین فاصله از خط که در فعالیت‌های قبل بررسی شده‌اند در این مسئله ترکیب و استفاده می‌شود.

درس دوم

دایره

اهداف

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند :

۱ تعیین معادلهٔ دایره به‌صورت استاندارد و ضمنی

۲ تبدیل معادلهٔ ضمنی به استاندارد

۳ بررسی وضعیت نقطه نسبت به دایره

۴ بررسی وضعیت خط نسبت به دایره

۵ بررسی وضعیت دو دایره نسبت به هم

۶ تعیین خط مماس بر دایره از نقطه‌ای روی دایره بدون استفاده از مشتق

روش تدریس

در این درس اولین مقطع مخروطی یعنی دایره به‌طور کامل بحث و بررسی می‌شود. در ابتدای این درس نیز دایره را به‌عنوان معروف‌ترین مقطع مخروطی معرفی می‌کند. تأکید مهم برای دانش‌آموزان روی این موضوع است که قرار است دایره و دیگر مقاطع به شکل تحلیلی بررسی شوند و تفاوت‌های بررسی ترسیمی و تحلیلی کاملاً بحث شود.

در ابتدای درس تعریف دایره براساس مکان هندسی که صفحات قبل توضیح داده شده است مشخص شود و سپس از روی آن معادله دایره تعیین شود.

در مثال اول این درس مشخص شود که برای نوشتن معادله دایره داشتن مختصات مرکز و شعاع دایره بسیار مهم است. در این مثال چند مورد مهم بررسی شده است که از جمله آنها محل برخورد با محور مختصات است. در ضمن معادلهٔ ضمنی دایره نیز مشخص شده است که در مطالب بعدی درس بسیار مهم خواهد بود.

در ادامهٔ درس روش تبدیل معادلهٔ ضمنی دایره به معادلهٔ استاندارد توضیح داده شده است. در این قسمت یک مثال و یک فعالیت وجود دارد که به دنبال هم دانش‌آموزان را برای رسیدن به این موضوع کمک

می‌کند. در مثال ابتدا این کار یعنی تبدیل معادله به استاندارد با ضرایب عددی انجام می‌گیرد که مسلماً کار ساده‌تری می‌باشد. دقّت شود در کل این فرایند ضرایب x^2 و y^2 عددی غیر از یک باشند.

ابتدا باید با تقسیم بر آنها ضرایب را به یک تبدیل کرده و سپس فرایند مربع کامل کردن را برای رسیدن به معادلهٔ استاندارد انجام داد. سپس در فعالیت شمارهٔ ۱ همین فرایند با استفاده از ضرایب کلی a ، b و c انجام شده است که نتیجهٔ این فرایند تولید فرمول برای تعیین شعاع و مختصات مرکز می‌باشد. استفاده از فرمول‌ها نباید تأکید شود و به دانش‌آموز توصیه شود با انجام مراحل مربع کامل کردن به سرعت می‌تواند شعاع و مرکز دایره را مشخص کند. اما در انتهای فعالیت بحث مهمی وجود دارد که به بررسی شرط دایره بودن معادله می‌پردازد یک معادلهٔ گسترده وقتی ضرایب x^2 و y^2 یک هستند می‌تواند نشان دهندهٔ دایره یا نقطه باشد و می‌تواند هیچ شکلی را مشخص نکند. بحث و تمایز بین این حالات که بسیار مهم است در انتهای فعالیت انجام شده است و بعد از بررسی آن، دانش‌آموزان به راحتی می‌توانند این موضوع را تشخیص دهند. در ادامهٔ درس کار در کلاس وجود داردکه موارد فوق در آنها تمرین می‌شود.

تا با مثال‌های عددی متعدد دانش‌آموزان به تسلط کافی برسند.

در مثال بعد یکی از حالت‌های مهم نوشتن معادلهٔ دایره مشخص می‌شود. در این مثال مختصات مرکز یک نقطهٔ دلخواه روی دایره داده شده است. بازهم می‌شود در این مثال تأکید کرد که مهم‌ترین اطلاعات مورد نیاز برای نوشتن معادلهٔ دایره داشتن مختصات مرکز و شعاع دایره است هر نوع اطلاعات دیگری که داده شود باید از روی آنها مختصات مرکز و شعاع دایره تعیین شوند تا معادلهٔ دایره نوشته شود.

در فعالیت شمارهٔ ۲ یکی دیگر از مثال‌های نوشتن معادلهٔ دایره مشخص شود. باز هم مشخص می‌شود باید از هر نوع اطلاعاتی که داده می‌شود برای نوشتن معادلهٔ دایره مختصات مرکز و شعاع دایره به‌دست آیند. در این فعالیت خط مماس بر دایره داده شده و براساس قضایای خوانده شده در سال قبل مشخص می‌شود که فاصلهٔ نقطهٔ مرکز تا خط مماس همان شعاع دایره است. در این فعالیت فرمول فاصلهٔ نقطه تا خط نیز یادآوری می‌شود که بسیار مهم است.

سپس در کار در کلاس بعدی، بررسی مهمی در زمینهٔ وتر درون دایره به وقوع می‌پیوندد. این کار در کلاس از مثال‌های بسیار مهمی است که چند ویژگی مهم را در دایره مورد بحث و بررسی قرار می‌دهد. تأکید بر این موضوع که شعاع عمود بر وتر آن را نصف می‌کند و در سال‌های قبل خوانده شده بسیار مهم است.

مثال بعد از آن بحث حالت‌های دو دایره نسبت به هم را بررسی می‌کند. طول خط‌المرکزین، وضعیت شعاع‌ها و مقایسهٔ آنها با هم منجر به بررسی کل حالت‌های دو دایره نسبت به هم می‌شود. در فعالیت شمارهٔ ۳ نیز همین مورد بحث و بررسی شده است. البته این بررسی در سال قبل به شکل ترسیمی انجام شده است و بررسی به شکل تحلیلی که از موارد سال قبل نیز در آن استفاده می‌شود باعث فهم بیشتر

حالت‌های دو دایره نسبت به هم می‌شود. لازم است به کمک دانش آموزان تقسیم‌بندی منظمی برای حالت‌های مختلف دو دایره نسبت به هم انجام شود. به سؤالی که در انتهای فعالیت شده است به دقت پرداخته شود. جواب این سؤال به قدرمطلق موجود در قسمت سوم و به‌صورت کلی قدرمطلق موجود در شرط مماس درونی بودن دو دایره مربوط می‌شود که معمولاً دانش‌آموزان اثر آن را با سهل‌انگاری از دست می‌دهند. بحث و بررسی این قدرمطلق دو وضعیت را مشخص می‌کند که در آن دایره مورد نظر یا به‌عنوان دایرهٔ درونی یا به‌عنوان دایرهٔ برونی مطرح می‌شود.

کار در کلاس بعدی، چند تمرین در خصوص وضعیت دو دایره نسبت به هم مطرح می‌کند که تمرینات مفیدی برای درک دانش‌آموزان از وضعیت‌های دو دایره نسبت به هم خواهد بود.

در فعالیت شمارهٔ ۴ وضعیت خط نسبت به دایره پرداخته شود. برای این بررسی دو روش مطرح شده است که روش اول براساس معادلهٔ حاصل از تلاقی خط و منحنی است. معادلهٔ حاصل از تلاقی یک معادله درجهٔ دوم است که ریشه داشتن، نداشتن و ریشهٔ مضاعف داشتن آن وضعیت خط نسبت به دایره را مشخص می‌کند. در روش دوم از فاصلهٔ مرکز تا خط و مقایسهٔ آن با شعاع استفاده شده است که بیشتر جنبهٔ ترسیمی دارد و درسال‌های قبل مورد بررسی ترسیمی و شهودی قرار گرفته است.

مثال بعد نیز به بررسی همین فعالیت اما در خصوص خط مماس بر دایره و نوشتن معادلهٔ مماس بر دایره پرداخته است. دقت شود در این مثال از مفاهیم مشتق برای تعیین شیب خط مماس استفاده نشده است و از شرط عمود بودن خط مماس بر شعاع حاصل استفاده شده است.

درس سوم
بیضی و سهمی

اهداف

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند :

۱ درک دقیق از تعریف بیضی و شکل بیضی
۲ تشخیص وضعیت نقطه نسبت به بیضی
۳ تعیین و تعریف پارامترهای بیضی و بررسی نقش آنها در رسم نمودار بیضی
۴ فهم درست از خروج از مرکز بیضی و نقش آن در تشخیص تغییرات ظاهری بیضی
۵ درک ویژگی بازتابندگی بیضی و ارتباط آن با مسائل خوانده شده در سال قبل
۶ درک تعریف سهمی و معادلهٔ سهمی
۷ بررسی شکل‌های مختلف سهمی با در نظر گرفتن مثبت و منفی شدن پارامتر سهمی
۸ انتقال محورها برای بررسی کلی سهمی در حالت کلی
۹ بررسی ویژگی بازتابندگی سهمی و کاربردهای آن

روش تدریس

بحث بیضی با یک فعالیت شروع شده است. هدف فعالیت شمارهٔ ۱ رسیدن به تعریف بیضی است. در این فعالیت ابتدا دانش‌آموز بودن شناخت از بیضی با ساده‌ترین وسایل ممکن رسم شکل را فرا می‌گیرد سپس در ادامهٔ فعالیت به بررسی وضعیت یک نقطه نسبت به بیضی می‌پردازد. نتیجهٔ این بررسی به دانش‌آموز می‌فهماند که مجموعه نقاط روی یک بیضی ویژگی مشخصی دارند که آن را به‌عنوان یک مکان هندسی مهم شاخص می‌کند. یعنی مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو نقطهٔ ثابت فرضی همیشه عددی یکسان و ثابت است که می‌دانیم این همان تعریف بیضی است.

در این فعالیت دانش‌آموز در ۵ مرحله به تعریف بیضی می‌رسد و دیده می‌شود که اثبات‌های موجود در هر مرحله براساس مطالب و موضوعاتی است که در سال‌های گذشته فرا گرفته است. در انتهای فعالیت نیز مشخص می‌شود دو نقطهٔ ثابت همان کانون‌های بیضی می‌باشند که نقش مهمی در رسم و تعریف بیضی دارند.

در فعالیت شمارهٔ ۲ پارامترهای مهم بیضی یعنی a ، b و c معرفی می‌شوند البته این فعالیت روند سریعی در شناسایی این پارامترها دارد و باید با حوصله و تمرکز کافی و حل تمرینات و مثال‌های متعدد روی این پارامترها بحث و بررسی کرد. دانش‌آموزان معمولاً این پارامترها را به خوبی یاد نمی‌گیرند و به همین دلیل با تسلط کافی بیضی را یاد نمی‌گیرند. به خصوص فرضیات قسمت اول فعالیت بسیار مهم و قابل تعمق است. در این قسمت قطر بزرگ به‌عنوان قطر کانونی و سپس قطر کوچک بیضی تعریف شده است. در همین قسمت بهتر است وضعیت بقیه‌ی قطرها با این دو قطر بررسی شود. از نکات مهم قسمت اول فعالیت این است که فقط O یعنی مرکز بیضی فقط وسط FF' است و وسط AA' یا BB' قرار گرفتن باید در قسمت‌های بعد اثبات شود و به‌عنوان پیش فرض در نظر گرفته شود. در ضمن فقط اندازه‌های OA و OB برابر a ، b فرض شده‌اند و برابر بودن OA' و OB' با a ، b نیز باید اثبات شود در ادامهٔ فعالیت نیز رابطهٔ بین پارامترهای a ، b و c به‌دست آمده است که بسیار مهم است.

سپس در کار در کلاس بعد به بررسی وتر کانونی بدون ذکر نام آن پرداخته می‌شود. دقت شود در سال‌های قبل معادلهٔ بیضی مشخص بود و با استفاده از آن وتر کانونی مشخص می‌شد اما در این کتاب معادلهٔ بیضی موجود نیست و باید طول وتر کانونی از روش‌های هندسی تعیین شود.

در فعالیت شمارهٔ ۳ تأثیر پارامترهای مختلف روی شکل ظاهری مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در این فعالیت خروج از مرکز به عنوان یک شاخص مهم ظاهری مشخص می‌شود و اثر تغییرات آن روی شکل دیده می‌شود. همچنین در این فعالیت فاصله‌هایی مانند FA و $F'A'$ به‌عنوان فاصلهٔ رأس کانونی تا کانون نزدیکتر و فاصله‌های FA' و $F'A$ به‌عنوان فاصله رأس کانونی تا کانون دورتر مورد بررسی قرار می‌گیرند. به نقطهٔ موجود در پارامترهای داده شده در۶ قسمت مختلف فعالیت دقت شود. این نظم با خروج از مرکز کوچک‌تر در دو قسمت اول شروع شده و به خروج از مرکزهای بزرگ‌تر در دو قسمت آخر منتهی می‌شود. توصیه می‌شود علاوه بر رسم جداگانهٔ بیضی‌ها، آنها را باهم در یک شکل مثلاً روی یک محور مختصات هم رسم کنید تا اثر خروج از مرکز در تغییرات ظاهری شکل دیده شود. البته نتیجهٔ این تغییرات ظاهری در توضیحات آخر فعالیت تشریح شده تا با بررسی دقیق آنها وضعیت بیضی واضح‌تر گردد.

در فعالیت شمارهٔ ۴ ویژگی بازتابندگی بیضی معرفی شده است که یکی از کاربردهای مهم در مقاطع مخروطی از جمله بیضی می‌باشد.

برای بررسی این ویژگی یک یادآوری در صفحهٔ قبل آورده شده است تا ارتباط موضوع با مباحث سال‌های قبل مشخص شود.

سپس درس سوم به بررسی مقطع مخروطی بعدی یعنی سهمی پرداخته است. معرفی سهمی نیز با یک فعالیت شروع شده است. فعالیت شمارهٔ ۵ برای مشخص شدن تعریف سهمی است. دانش‌آموز را در این

فعالیت به ترسیم شکل سهمی هدایت کنید. دقت شود دانش‌آموزان از قطر شهودی و ظاهری با شکل سهمی در سال‌های قبل آشنا هستند. این فعالیت تعریف دقیق‌تری از سهمی را نسبت به سال‌های قبل به او نشان می‌دهد. در این فعالیت مشخص کنید که سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط و یک نقطه به یک فاصله‌اند. روش رسم سهمی به ساده‌ترین روش ممکن مشخص می‌شود. استفاده از وسایل ساده‌ای مانند گونیا و نَخ رسم سهمی را به سادگی نشان می‌دهد. هدف این فعالیت مشخص شدن تعریف و شکل سهمی است.

فعالیت بعد یعنی فعالیت ۶ به تعیین معادلهٔ سهمی منجر می‌شود. برای سادگی در تعیین معادلهٔ سهمی فرض شده است که رأس سهمی روی مبدأ مختصات است. با این شکل روند محاسبات ساده‌تر می‌شود و دانش‌آموز درگیر محاسبات سخت و طولانی نمی‌شود که از هدف اصلی یعنی تعیین معادلهٔ سهمی براساس تعریف فعالیت قبل دور شود. در ادامهٔ فعالیت نیز هر چهار حالت سهمی یعنی افقی با دهانه به سمت راست یا چپ و سهمی قائم با دهانه به سهم بالا یا پایین رسم شده است. برای دانش‌آموز باید مشخص شود که این چهار حالت در مثبت یا منفی بودن پارامتر چگونه تأثیر می‌گذارد. سپس در جدول انتهای فعالیت نتایج این بررسی‌ها مشخص شده است.

در مثال بعد از فعالیت ۶ به نوعی رفتار عکس بررسی شده است. در فعالیت ۶ ویژگی‌ها مشخص بودند و از روی آنها معادله سهمی تعیین می‌شد ولی در این مثال معادلهٔ سهمی مشخص است و از روی معادله ویژگی‌ها مشخص می‌شود و سهمی رسم می‌گردد.

بخش بعدی تدریس به انتقال (محورها) اختصاص یافته است که امری لازم است. طبیعی است که سهمی که رأس آن روی مبدأ مختصات باشد نوع ساده‌ای از معادلهٔ سهمی را به ما می‌دهد. مسلماً برای اینکه رأس سهمی در مکان‌های دیگر قرار گیرد راحت‌ترین راه استفاده از انتقال است که در سال‌های گذشته مطالعه شده است. در این قسمت با انتقال می‌توان رأس سهمی را به هر نقطه‌ای از صفحهٔ مختصات انتقال داد و به تبع آن معادلهٔ سهمی متناظر را بحث و بررسی کرد. در یک جدول نیز این موارد چهارگانه دوباره بحث و بررسی و جمع‌بندی شده است. در این قسمت دو مثال وجود دارد که همین موضوع را بررسی می‌کند یعنی نوشتن معادلهٔ سهمی که رأس آنها در نقطه‌ای غیر از مبدأ مختصات باشد. مثال اول یک سهمی قائم و مثال دوم یک سهمی افقی مشخص می‌کند.

در ادامهٔ درس تبدیل معادلهٔ یک سهمی به‌صورت متعارف مطرح شده است. تمامی مقاطع مخروطی مانند دایره شکل ضمنی یا گسترده دارند. سهمی نیز دارای شکل ضمنی است که برای تبدیل معادلهٔ گسترده به معادلهٔ استاندارد یا متعارف باز هم باید از روش مربع کامل کردن استفاده کرد. در این قسمت با یک مثال عددی این روش توضیح داده شده است.

در قسمت بعد رسم سهمی توضیح داده شده است. در سال‌های گذشته دانش‌آموزان به شیوه‌های مختلف مانند تعیین رأس و نقاط کمکی، سهمی‌ها را رسم کرده‌اند. اما در این بخش نگرش دقیق‌تری از رسم سهمی به دانش‌آموز داده می‌شود. در این قسمت روش رسم براساس تعریف کامل سهمی بررسی می‌شود. به عبارت دیگر، غیر از رأس، نقطهٔ کانون و معادلهٔ خط هادی نیز مهم می‌باشند. توجه به کانون و خط هادی سهمی و تعریف سهمی که مجموعه‌ای از نقاط با فاصلهٔ یکسان نسبت به کانون و خط هادی است رسم سهمی را دقیق‌تر و کامل‌تر خواهد کرد. در مثال انتهای این قسمت این نوع رسم به وضوح توضیح داده می‌شود.

آخرین بحث در سهمی همان بررسی ویژگی بازتابندگی سهمی‌هاست که کاربردهای آن را مشخص می‌کند. این ویژگی نشان می‌دهد که سهمی در صنایع مختلف کاربردهای فراوانی دارد و استفاده از سطوح سهمی شکل بسیار کاربردی می‌باشد. استفاده از این سطوح در لامپ‌ها و ماهواره‌ها یکی از کاربردهای این مقطع مخروطی می‌باشد که بیشتر دیده می‌شود.

تمرینات (بیضی و سهمی)

۱ بیضی E به کانون‌های F و F' و قطرهای بزرگ و کوچک $2a$ و $2b$ مفروض است. دایرهٔ به قطر FF' را رسم می‌کنیم.

الف) اگر این دایره، بیضی را در نقطهٔ M قطع کند، ثابت کنید مساحت مثلث MFF'، مساوی مساحت مربعی به ضلع b است.

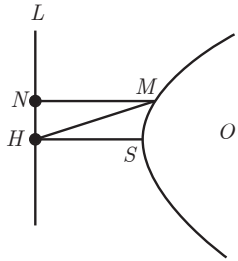
ب) نشان دهید این دایره، بیضی را در چهار نقطه قطع می‌کند، اگر و تنها اگر خروج از مرکز بیضی بزرگ‌تر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد و این دایره، بر بیضی در دو نقطه مماس است اگر خروج از مرکز بیضی مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد و اگر خروج از مرکز بیضی کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، بیضی و دایره نقطهٔ برخوردی ندارند.

۲ بیضی E به کانون‌های F و F' و قطرهای بزرگ و کوچک $2a$ و $2b$ مفروض است. دایره‌ای به مرکز F و به شعاع b رسم می‌کنیم تا بیضی را در نقطهٔ M قطع کند. ثابت کنید زاویهٔ $F'MF$، حاده است، اگر $a < \frac{3}{2}b$ و منفرجه است، اگر $a > \frac{3}{2}b$ و قائمه است اگر $a = \frac{3}{2}b$

۳ بیضی E به کانون‌های F و F' و قطر بزرگ AA' مفروض است. به مرکز F و شعاع a دایره‌ای رسم می‌کنیم. طول مماسی که از A' بر دایرهٔ فوق می‌توان رسم کرد به‌دست آورید.

۴ در نقطهٔ M واقع بر بیضی E به کانون‌های F و F'، مماس d را بربیضی رسم کرده‌ایم. اگر فاصلهٔ F' از d باشد، MF' و MF را برحسب a بیابید.

۵ در نقطهٔ M واقع بر بیضی E به کانون‌های F و F'، مماس d را رسم کرده‌ایم و در نقطهٔ M عمودی بر d رسم کرده‌ایم تا قطر بزرگ بیضی را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید : $e=\frac{DF}{MF}$ (خروج از مرکز بیضی)

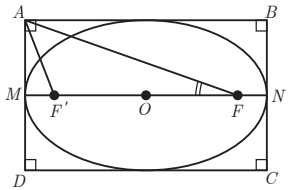


۶ در شکل مقابل M نقطه‌ای دلخواه روی سهمی و S رأس سهمی و MN و SH بر خط هادی سهمی (L) عمود شده است. ثابت کنید :

$$MH^2+MN^2=2(MS^2+HS^2)$$

۷ در مثلث ABC، مجموعه نقاطی را مشخص کنید که به رأس A نزدیک‌تر از ضلع BC باشند. (با ذکر دلیل)

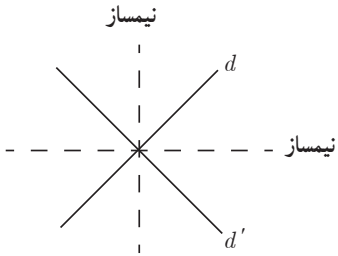
۸ در شکل مقابل بیضی E در چهارضلعی $ABCD$ محاط شده است. اگر قطر بزرگ و کوچک به ترتیب $4\sqrt{2}$ و ۴ باشند و فاصلهٔ رأس A از کانون F بیضی، مساوی ۴ واحد باشد، اندازهٔ زاویهٔ AFM و فاصلهٔ A از کانون F' را بیابید.



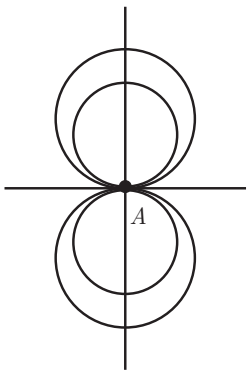
حل تمرینات

■ **تمرین (مکان هندسی)**

۱ مکان هندسی هریک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید.

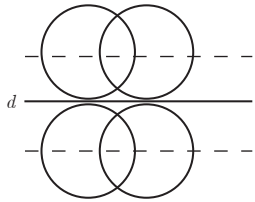


الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند. این مکان هندسی همان نیمساز دو زاویهٔ حاصل از برخورد دو خط متقاطع می‌باشد.

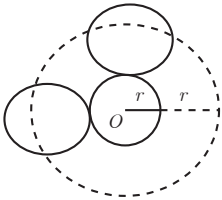


ب) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند. روی خط عمود بر خط d که از A می‌گذرد قرار دارد. نقطه A جز مکان هندسی مطلوب نمی‌باشد و باید محذوف در نظر گرفته شود.

ج) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند. دو خط موازی با خط d می‌باشد که به فاصلهٔ r از خط d رسم شده‌اند.

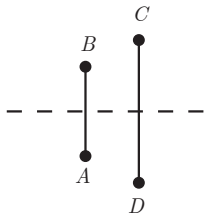


ت) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O,r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی‌اند روی دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $۲r$

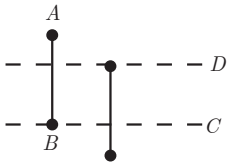


۲ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید)

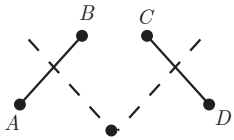
در حالت کلی محل برخورد عمودمنصف‌های AB و CD جواب مسئله است، که شامل حالات زیر می‌شود :



۳ــ بی‌شمار نقطه



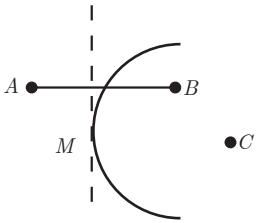
۲ــ هیچ نقطه



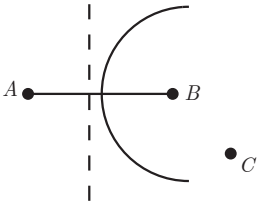
۱ــ یک نقطه

۳ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید)

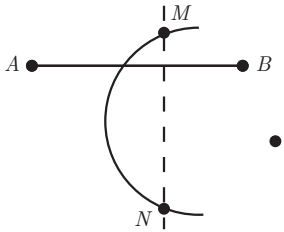
مکان مورد نظر محل برخورد عمودمنصف AB با دایره‌ای است که به مرکز C و شعاع ۳cm رسم شود.



۳ــ یک نقطه

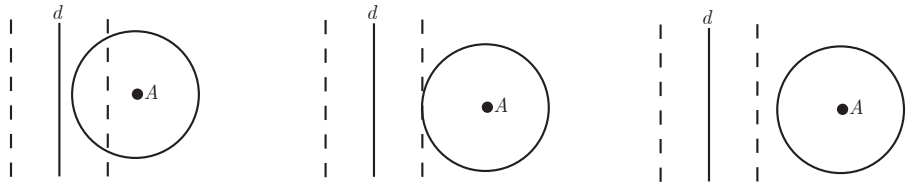


۲ــ هیچ نقطه



۱ــ دو نقطه

۴ نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید) مکان هندسی مورد نظر محل برخورد دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲cm با خطوط موازی d است که به فاصله ۳cm از آن رسم شده‌اند. حالت‌های زیر رُخ می‌دهد.

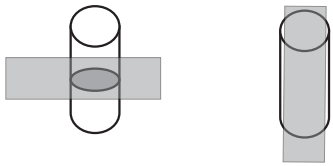


۱ــ دو نقطه　　۲ــ یک نقطه　　۳ــ هیچ نقطه

۵ هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکلی است؟

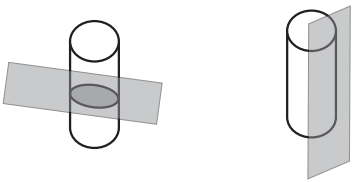
دو خط متقاطع

۶ هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l مسطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحهٔ P، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید. (چهار حالت)



✓اگر صفحهٔ P عمود بر d و l باشد سطح مقطع حاصل یک دایره خواهد بود.

✓اگر صفحهٔ P با d و l زاویهٔ θ بسازد سطح مقطع حاصل یک بیضی خواهد بود.



✓اگر صفحهٔ P موازی d و l باشد مشکل حاصل دو خط موازی است.

✓اگر صفحهٔ P بر سطح استوانه مماس باشد یک خط حاصل می‌شود.

تمرین (دایره)

۱ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که :

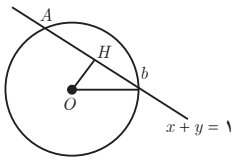
الف) $O(۱,۱)$ مرکز آن و $A(۳,۲)$ نقطه‌ای از آن باشد.

$$OA = ۲ = \sqrt{(۱-۳)^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{۵} \Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۵$$

ب) $O(۲,۱)$ مرکز آن بوده و بر خط $۳x+۴y=۰$ مماس باشد.

$$r = OH = \frac{|۶+۴|}{\sqrt{۹+۱۶}} = ۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۴$$

پ) $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=۱$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.



$$OH = \frac{|-۱-۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow OH^۲ + HB^۲ = OB^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۲} + ۱ = OB^۲$$

$$\Rightarrow OB = r = \sqrt{\frac{۱۱}{۲}} \Rightarrow (x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۱۱}{۲}$$

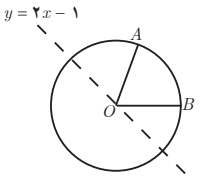
ت) خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=۶$ بر آن مماس باشد.

$$\begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۱ \end{cases} \rightarrow ۲-y=۳ \rightarrow y=-۱$$

$$۲x=۴ \rightarrow x=۲ \xrightarrow{O\left|\begin{matrix}۲\\-۱\end{matrix}\right.} (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۱}{۲۵}$$

$$d = r = \frac{|۸-۳-۶|}{\sqrt{۱۶+۹}} = \frac{۱}{۵}$$

ج) از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد و $y=۲x-۱$ شامل قطری از آن باشد.



$$OA = OB = \sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲} = \sqrt{(x-۳)^۲ + y^۲}$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ + ۴x^۲ - ۱۲x + ۹ = x^۲ - ۶x + ۹ + ۴x^۲ - ۴x + ۱$$

$$-۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow O\left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right.$$

$$OA = r = \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰} \qquad (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ = ۱۰ \Rightarrow x^۲ + (y+۱)^۲ = ۱۰$$

۲ حدود a را طوری به‌دست آورید که $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a=۰$ بتواند معادلهٔ یک دایره باشد؟

$$a^۲+b^۲-۴c>۰ \Rightarrow ۹+۲۵-۴a>۰ \Rightarrow ۴a<۳۴ \Rightarrow a<\frac{۱۷}{۲}$$

۳ وضعیت هر یک از نقاط $A(-۱,-۱)$، $B(۱,-۲)$ و $C(۲,۳)$ و $D(۴,-۱)$ را نسبت به دایره $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۵=۰$ تعیین کنید.

$$O(۱,-۲)\,,\ r=\frac{\sqrt{۴+۱۶+۲۰}}{۲}=\sqrt{۱۰}$$

$OC=\sqrt{۱+۲۵}=\sqrt{۲۶} \Rightarrow OC>r \Rightarrow$ C خارج دایره و A داخل دایره

$OA=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵} \Rightarrow OA<r \Rightarrow$ O داخل دایره

$OB=\sqrt{۰+۰}=۰ \Rightarrow$ B مرکز دایره و $OD=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰} \Rightarrow OD=r \Rightarrow$ D روی دایره

۴ وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $x^۲+y^۲=۴\ ,\ x^۲+y^۲-۲x=۴$

$$\begin{cases}O(۰,۰)\\ r=۲\end{cases}\quad \begin{cases}O'(۱,۰)\\ r'=\dfrac{\sqrt{۴+۱۶}}{۲}=\sqrt{۵}\end{cases}\quad \begin{cases}d=۱\\ r+r'=\sqrt{۵}+۲ \Rightarrow r-r'<d<r+r' \Rightarrow\\ r-r'=\sqrt{۵}-۲\end{cases}$$ متقاطع

ب) $x^۲+(y-۱)^۲=۱\ ,\ (x-۱)^۲+y^۲=۱$

$$\begin{cases}O(۰,۱)\\ r=۱\end{cases}\quad \begin{cases}O'(۱,۰)\\ r'=۱\end{cases}\quad \begin{cases}d=\sqrt{۲}\\ r+r'=۲ \Rightarrow r-r'<d<r+r' \Rightarrow\\ r-r'=۰\end{cases}$$ متقاطع

ج) $x^۲+y^۲=۱\ ,\ x^۲+y^۲-۳\sqrt{۲}x-۳\sqrt{۲}y+۵=۰$

$$O'\left|\begin{matrix}\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲}\\ \dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲}\end{matrix}\right.\qquad R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۸+۱۸-۲۰}=۲\qquad OO'=\sqrt{\frac{۱۸}{۴}+\frac{۱۸}{۴}}=۳\qquad ۳=۱+۲$$

$\Rightarrow OO'=R+R' \Rightarrow$ مماس خارج‌اند

د) $x^۲+y^۲=۱\ ,\ x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$

$$\begin{cases} O(۰,۰) \\ r=۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} O'(۳,۰) \\ r'=\dfrac{\sqrt{۳۶+۴-۳۶}}{۲}=۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} d=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰} \\ r+r'=۲ \Rightarrow d>r+r' \Rightarrow \\ r-r'=۰ \end{cases} \quad \text{متخارج}$$

۵ نقاط $A(-۱,-۱)$, $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ رئوس مثلث ABC هستند، معادلهٔ دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید سپس معادلهٔ مماس بر این دایره را در رأس B به‌دست آورید.

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰ \Rightarrow \begin{cases} A \Rightarrow ۱+۱-a-b+c=۰ \\ B \Rightarrow ۱+۱+a+b+c=۰ \\ C \Rightarrow ۱+۹+a-۳b+c=۰ \end{cases} \Rightarrow c=-۲ \Rightarrow a=-۲, b=۲$$

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y-۲=۰ \Rightarrow O\left|\begin{matrix} ۱ \\ -۱ \end{matrix}\right.$$

$$m_{OB}=\frac{-۱-۱}{۱-۱}=\text{ت.ن} \Rightarrow m_{\text{مماس}}=۰ \Rightarrow y-۱=۰(x-۱) \Rightarrow y=۱$$

۶ وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $۳x+۴y=۰\ ,\ x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰$

$$\begin{cases} O(۲,۲) \\ r=\dfrac{\sqrt{۱۶+۱۶-۲۸}}{۲}=۱ \end{cases} \Rightarrow OH=\frac{|۶+۸|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow OH>r \Rightarrow \text{خط دایره را قطع نمی‌کند}$$

ب) $x+y=۲\ ,\ x^۲+y^۲=۲$

$$\begin{cases} O(۰,۰) \\ r=\sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow OH=\frac{|۰+۰-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲} \Rightarrow OH=r \Rightarrow \text{خط بر دایره مماس است}$$

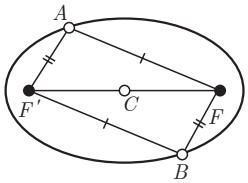
ج) $x+y=۱\ ,\ x^۲+y^۲-۲x-۲y=۲$

$$\begin{cases} O(۱,۱) \rightarrow OH=\dfrac{|۱+۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \\ r=\dfrac{\sqrt{۴+۴+۸}}{۲}=۲ \end{cases} \Rightarrow OH<r \Rightarrow \text{متقاطع}$$

تمرین (سهمی)

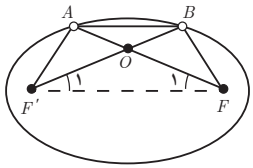
۱ دو نقطهٔ A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است اگر $AF'=BF$ باشد، نشان دهید :

الف) درحالتی‌که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند با هم موازی‌اند.



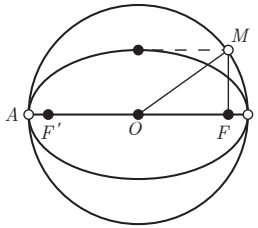
$$\left.\begin{array}{l} AF'+AF=۲a \\ BF'+BF=۲a \\ BF=AF' \end{array}\right\} \Rightarrow AF=BF' \Rightarrow AFBF' \text{ چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است } \Rightarrow AF \parallel BF'$$

ب) درحالتی‌که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



$$\left.\begin{array}{l} AF'+AF=۲a \\ BF'+BF=۲a \\ BF=AF' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AFF'}=\overset{\Delta}{BFF'} \Rightarrow \begin{cases} AF=BF' \\ \hat{F}_۱=\hat{F}'_۱ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{MFF'} \text{ متساوی الساقین}$$

۲ قطر دایرهٔ C، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای M مانند قطع کند، ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.

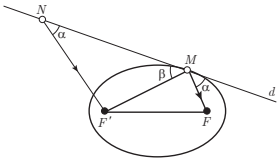


$$OA=a \ , \ OF=c \Rightarrow OM=R=a$$

$$\overset{\Delta}{OMF} \Rightarrow OM^۲=OF^۲+MF^۲ \Rightarrow a^۲=c^۲+MF^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c^۲=a^۲-MF^۲ \\ c^۲=a^۲-b^۲ \end{cases} \Rightarrow MF^۲=b^۲ \Rightarrow MF=b$$

۳ در شکل مقابل نقطهٔ M روی بیضی و کانون‌های بیضی F و F' مشخص شده‌اند خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند، ثابت کنید : $NF'=MF'$



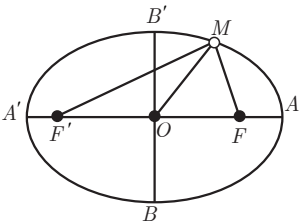
می‌دانیم $\left.\begin{array}{l}\hat{\alpha}=\hat{\beta}\\ MF \parallel NF', d \text{ مورب} \Rightarrow \angle N=\angle\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{N}=\hat{\beta}$

$\Rightarrow \overset{\Delta}{FMN}$ متساوی الساقین $\Rightarrow NF'=MF'$

۴ نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است :

الف) نشان دهید $OM=OF=OF'$

$c^۲=a^۲=b^۲ \Rightarrow c^۲=۲۵-۹=۱۶ \Rightarrow c=۴ \Rightarrow OF'=OF=OM=۴$



ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

چون OM میانهٔ نظیر ضلع $F'F$ است و با نصف آنها برابر است پس مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ج) طول‌های MF و MF' را به‌دست آورید.

$MF+MF'=۱۰ \Rightarrow MF=۱۰-MF'$

$MF^۲=MF'^۲=FF'^۲ \Rightarrow (۱۰-MF')^۲+MF'^۲=۶۴ \Rightarrow ۲MF'-۲۰MF'+۳۶=۰$

$\Rightarrow MF'^۲-۱۰MF'+۱۸=۰$

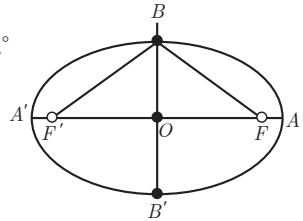
$MF'=\dfrac{۵\pm\sqrt{۲۵-۱۸}}{۱} \Rightarrow MF'=۵\pm\sqrt{۷} \Rightarrow MF=۵\mp\sqrt{۷} \Rightarrow \begin{cases}MF'=۵+\sqrt{۷}\\ MF=۵-\sqrt{۷}\end{cases}$

۵ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟

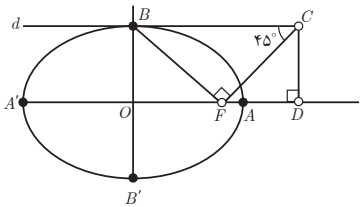
$a = ۲b$

$c^۲ = a^۲ - b^۲ \Rightarrow c^۲ = ۴b^۲ - b^۲ \Rightarrow c^۲ = ۳b^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۳}b$

$\tan O\hat{B}F = \frac{OF}{OB} = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \Rightarrow O\hat{B}F = ۶۰^\circ \Rightarrow FBF' = ۱۲۰^\circ$



۶ در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ c قطع کند و از c عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$ ، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به‌دست آورید.



$AF = a - c$

$FD = b = \sqrt{a^۲ - b^۲} = \sqrt{c^۲} = c$

$AD = FD - FA = c - (a - c) = ۲c - a$

$\frac{AD}{AF} = \frac{۲c - a}{a - c}$

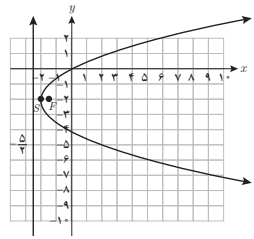
۷ سهمی $y^۲ = ۲x - ۴y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

$y^۲ + ۴y + ۴ - ۴ = ۲x \Rightarrow (y+۲)^۲ = ۲x + ۴ \Rightarrow (y+۲)^۲ = ۲(x+۲)$ سهمی افقی

رأس $S(-۲,-۲)$ $\quad ۴a = ۲ \to a = \frac{۱}{۲}$ $\quad F\left|\begin{matrix} h+a \\ k \end{matrix}\right.$ $\quad F\left|\begin{matrix} -۲+\frac{۱}{۲} \\ -۲ \end{matrix}\right.$ $\quad F\left|\begin{matrix} -\frac{۳}{۲} \\ -۲ \end{matrix}\right.$

محل برخورد با محور xها $\Rightarrow y = ۰ \Rightarrow ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰$ $\quad A\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right.$

محل برخورد با محور yها $\Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y^۲ = -۴y \Rightarrow \begin{cases} y = ۰ & B\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right. \\ y = -۴ & C\left|\begin{matrix} ۰ \\ -۴ \end{matrix}\right. \end{cases}$



۸ مختصات رأس و کانون سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ را به‌دست آورید. $(a \neq ۰)$

$$\frac{y}{a} = x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{y}{a} = x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{b^۲}{۴a^۲} + \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{y}{a} = (a + \frac{b}{۲a})^۲ - \frac{b^۲}{۴a^۲} + \frac{c}{a}$$

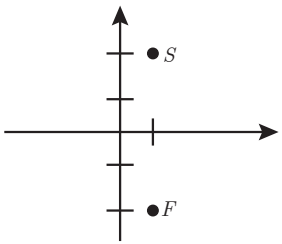
$$\frac{y}{a} + \frac{b^۲}{۴a^۲} - \frac{c}{a} = (a + \frac{b}{۲a})^۲ \Rightarrow (x + \frac{b}{۲a})^۲ = \frac{۱}{a}(y + \frac{b^۲}{۴a^۲} - c)$$ سهمی قائم

رأس $S\left|\begin{matrix} -\frac{b}{۲a} \\ c - \frac{b^۲}{۴a} \end{matrix}\right.$ $\quad S\left|\begin{matrix} -\frac{b}{۲a} \\ \frac{۴ac - b^۲}{۴a} \end{matrix}\right.$ $\quad F\left|\begin{matrix} h \\ k + P \end{matrix}\right.$ $\quad F\left|\begin{matrix} -\frac{b}{۲a} \\ \frac{۴ac - b^۲}{۴a} + \frac{۱}{۴a} \end{matrix}\right.$ $\quad ۴p = \frac{۱}{a} \Rightarrow p = \frac{۱}{۴a}$

۹ معادلهٔ سهمی را بنویسید که $S(۱,۲)$ رأس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد.

$SF = ۴ \Rightarrow a = ۴$

$(x-h)^۲ = ۴a(y-k) \Rightarrow (x-۱)^۲ = -۱۶(y-۲)$



۱۰ سهمی $y^۲ = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

$y^۲ = ۴(x-۱) \quad S\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۰ \end{matrix}\right.$

$۴a = ۴ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow F = O\left|\begin{matrix} \alpha + a = ۱ + ۱ = ۲ \\ \beta = ۰ \end{matrix}\right.$

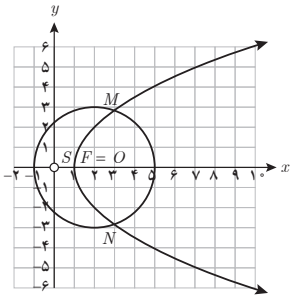
$(x-۲)^۲ + (y-۰)^۲ = ۹ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۴x - ۵ = ۰$

$$\begin{cases} y^۲ = ۴x - ۴ \\ y^۲ = -x^۲ + ۴x + ۵ \end{cases} \Rightarrow ۴x - ۴ = -x^۲ + ۴x + ۵ \Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = \pm ۳$$

$x = ۳ \Rightarrow y^۲ = ۸ \Rightarrow y = \pm ۲\sqrt{۲}$

$x = -۳ \Rightarrow y^۲ = -۱۶$

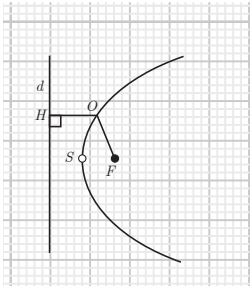
$M\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۲\sqrt{۲} \end{matrix}\right. \qquad N\left|\begin{matrix} ۳ \\ -۲\sqrt{۲} \end{matrix}\right.$



۱۱ سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

با توجه به اینکه OH و OF شعاع دایره هستند پس با هم برابرند یعنی : $OH=OF=r$

که این تعریف سهمی است پس نقطهٔ O روی سهمی قرار گرفته است.

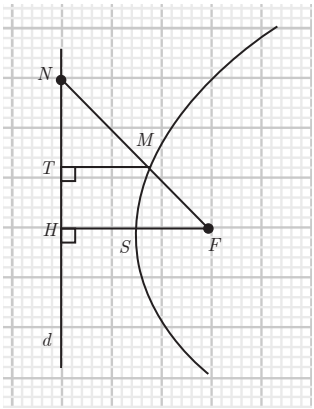


۱۲ در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم، ثابت کنید : $\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$

$$MF = MT\,,\ FA = AH$$

$$\overset{\Delta}{NMT} \sim \overset{\Delta}{NFH} \Rightarrow \frac{NM}{NF}=\frac{MT}{FH} \Rightarrow \frac{NM}{NF}=\frac{MF}{۲FA} \Rightarrow \frac{MN}{MF}=\frac{NF}{۲FA}$$

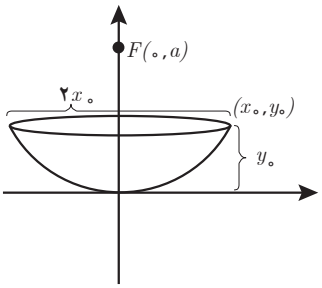
$$MT \parallel FH \Rightarrow \frac{MN}{MF}=\frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$



۱۳ یک دانش آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهدهٔ فاصلهٔ کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصلهٔ کانونی آن را به‌دست آورد. او از معلم‌اش خواست که فرمولی برای محاسبهٔ فاصلهٔ کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت : باید قطر دهانهٔ دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازهٔ گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصلهٔ کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.

$(x-0)^2=4a(y-0) \Rightarrow x^2=4ay$

نقطهٔ روی سهمی $\xrightarrow{(x_0,y_0)} x_0^2 = 4ay_0 \rightarrow a = \dfrac{x_0^2}{4y_0}$



۱۴ فرض کنید از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد. با استفاده از خواص بیضی شیوهٔ رسم این مثلث را توضیح دهید.

با داشتن BC (کانون‌ها به فاصلهٔ BC از هم قرار دارند) وسط آنها را O مرکز بیضی در نظر گرفته و از دو طرف به اندازهٔ $p-c$ یعنی محیط منهای BC روی امتداد BC انتخاب کرده تا دور آن بیضی پدید آیند. با داشتن O و C می‌توان b را محاسبه کرد و بیضی را رسم کرد.

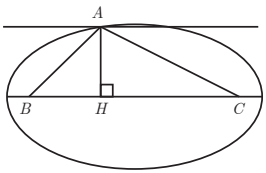
$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = (p-c)^2 - c^2 \Rightarrow b = \sqrt{p^2 - pc}$

$AB+AC+BC = 2p \Rightarrow AB + AC = 2p - BC \Rightarrow 2a = 2p - BC$

$AH < H \Rightarrow$ ۴ جواب

$AH = H \Rightarrow$ ۲ جواب

$AH > H \Rightarrow$ جواب ندارد



بیضی با کانون‌های B و C و رأس A نقطه‌ای از بیضی که قطر بزرگ بیضی $2a$ است رسم می‌کنیم خط موازی BC به فاصلهٔ AH از آن رسم می‌کنیم.

۱۵ سهمی $y=x^2$ و دو خط موازی $d_1: y=ax+b$ و $d_2: y=ax+b'$ را که با سهمی متقاطع‌اند در نظر بگیرید :

الف) معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y=x^2$ باشد.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax+b \end{cases} \Rightarrow x^2 = ax+b \Rightarrow x^2 - ax - b = 0$$

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات نقطهٔ M را به‌دست آورید.

$$\text{ریشه‌ها} \Rightarrow \alpha, \beta \Rightarrow A\left|\begin{matrix}\alpha \\ a\alpha+b\end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix}\beta \\ a\beta+b\end{matrix}\right. \Rightarrow M\left|\begin{matrix}\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \dfrac{a\alpha+b+a\beta+b}{2}\end{matrix}\right. \quad M\left|\begin{matrix}\dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a^2+2b}{2}\end{matrix}\right.$$

پ) مراحل الف و ب را با جای گذاری خط d_2 با d_1 انجام دهید و مختصات نقطهٔ M' (نقطهٔ وسط پاره‌خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax+b' \end{cases} \Rightarrow x^2 - ax - b' = 0$$

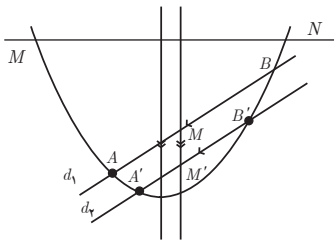
$$\text{ریشه‌ها} \Rightarrow \alpha', \beta' \Rightarrow A\left|\begin{matrix}a' \\ a\alpha'+b'\end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix}\beta' \\ a\beta'+b'\end{matrix}\right. \Rightarrow M'\left|\begin{matrix}\dfrac{\alpha'+\beta'}{2} \\ \dfrac{a\alpha'+a\beta'+2b'}{2}\end{matrix}\right. \quad M'\left|\begin{matrix}\dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a^2+2b'}{2}\end{matrix}\right.$$

ت) خط MM' نسبت به محور yها چه وضعیتی دارد؟

$$m_{MM'} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_2-y_1}{0} = \text{ت ن} \Rightarrow \text{موازی محور } y\text{ها}$$

ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

دو خط دلخواه d_1 و d_2 را موازی هم رسم می‌کنیم تا سهمی را در دو نقطه قطع کند. وسط آنها را M و M' می‌نامیم MM' موازی محورتقارن است. سپس در نقطه‌ای دلخواه عمودی بر خط MM' رسم می‌کنیم تا سهمی را در دو نقطهٔ M و N سهمی را قطع کند. عمودمنصف MN همان محور تقارن سهمی است که از رأس آن هم می‌گذرد.



فصل سوم

بردارها

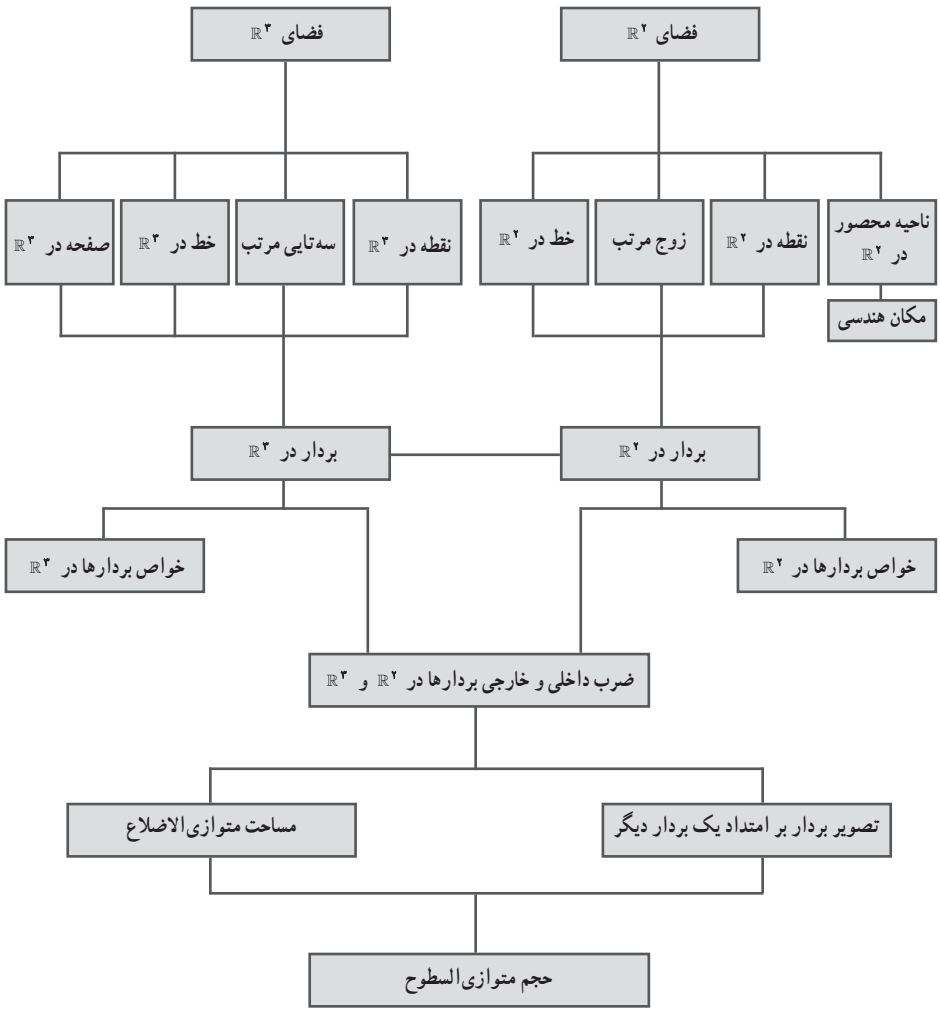
نگاه کلی به فصل

فصل بردارها به دو درس «معرفی فضای $\mathbb{R}^3$» و «ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها» تقسیم می‌شود. در این فصل دانش‌آموزان به تعمیق مفاهیم بردارها و ارتباط آن با هندسه از یک‌سو و ارتباطش با مباحث جبری از یکدیگر می‌پردازند. گفتنی است دانش‌آموزان پیش‌تر با مفهوم بردار بر روی محور اعداد و نیز بردار در صفحه آشنا شده‌اند. بنابراین تعمیم و تعمیق مفهوم بردار در این فصل بر پایه دانش قبلی دانش‌آموز استوار است. از این رو از ذکر تمامی مقدمات اجتناب شده و با اشاره‌ای به آنها از مباحث مقدماتی که قبلاً فرا گرفته شده عبور کرده و به تعمیم آنها می‌پردازیم.

درس اول معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ می‌پردازد. مسیر در نظر گرفته شده برای معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ بر مبنای شناخت دانش‌آموز در فضای $\mathbb{R}^2$، و نیز آشنایی او با فضای ۳بعدی که در سال‌های قبل با آن آشنا شده است، می‌باشد. دانش‌آموزان در سال‌های قبل با دستگاه مختصات دوبعدی (صفحه) و مفهوم نقطه در صفحه و همچنین رسم نمودار توابع در صفحه آشنا شده‌اند، اما بیشتر این مفاهیم را به‌صورت شهودی فرا گرفته‌اند. در آغاز این درس سعی می‌شود که همان مفاهیم قبلی را باز تعریف کنیم و ذهن انتزاعی دانش‌آموزان را تقویت کنیم. از جمله موضوعاتی که به شناخت عمیق‌تر فضای $\mathbb{R}^2$ کمک می‌کند، یافتن نواحی از این صفحه است که با قیودی از جنس خط محدود شده‌اند. پس از مطالعه سریع فضای $\mathbb{R}^2$ که ترکیبی از مرور مطالب قبلی و بیان برخی ویژگی‌های آن است با دیدگاهی مابین شهود و دیدگاه اصل موضوعی زمینه لازم برای معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ آماده می‌شود. پس از آن به معرفی بردارها می‌پردازیم. مجدداً همانند قبل ابتدا بردارها در $\mathbb{R}^2$ یادآوری شده و تا اندازه‌ای خواص آنها به‌صورت اصل موضوعی بیان می‌شود و سپس به بردارها در $\mathbb{R}^3$ می‌پردازیم.

درس دوم به تعریف و ارائه خواص ضرب بردارها می‌پردازد. ابتدا به ضرب داخلی و خواص آن می‌پردازد و سپس به ضرب خارجی دو بردار پرداخته می‌شود. دانش‌آموزان در این درس درمی‌یابند که رفتار و خواص بردارها از جمله اعمال اصلی بین آنها با اعداد حقیقی متفاوت است و عملاً با اشیای جدیدی روبه‌رو هستند که قواعد و ویژگی‌های خود را دارند. در این درس سعی شده است که به جای تعریف یک‌باره این ضرب‌ها، دانش‌آموزان را در فرایند ساخت و تعریف آنها همراه کرد، گرچه شاید همیشه میسر نباشد. از این رو تلاش بر این است که در بیان خواص و تعاریف مربوط به این دو روش ضرب بین بردارها از شهود دانش‌آموز حداکثر استفاده به‌عمل آید. از جمله کاربردهایی از ضرب خارجی و داخلی که در این درس ارائه شده است یافتن حجم متوازی‌السطوحی است که بردارهای سازنده آن داده شده است. برای این منظور می‌بایست قبل از یافتن حجم متوازی‌السطوح، نحوه یافتن تصویر یک بردار در امتداد یک بردار دیگر و نیز نحوه محاسبه مساحت متوازی‌الاضلاع به کمک بردارها آموزش داده شود.

نقشه مفهومی فصل



چند نمونه سؤال ارزشیابی

۱ اگر $\vec{a}=(۱,۳,۲)$ و $\vec{b}=(-۱,۲,۱)$ باشند حاصل عبارت $(\vec{a}+\vec{b})\times(۲\vec{a}-۳\vec{b})$ را به‌دست آورید.

۲ نشان دهید اگر a و b دو بردار مخالف صفر عمود بر هم باشند آن‌گاه ضرب داخلی آنها صفر است و برعکس

۳ اگر $\vec{a}\perp\vec{b}$ نشان دهید $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$

۴ اگر $x+y-۲z=۶$ باشد حداقل مقدار $x^۲+y^۲+z^۲$ کدام است.

(راهنمایی : از نامساوی کشی شوارتز استفاده کنید. دو بردار $\vec{a}=(x,y,z)$ و $\vec{b}=(۱,۱,-۲)$ را انتخاب کنید)

۵ تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ روی بردار $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

$\vec{b}=(-۲,۳,۱)$, $\vec{c}=(-۱,-۱,۲)$

۶ تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۴,-۳,۲)$ را بر امتداد برداری که با قسمت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده مساوی می‌سازد را به‌دست آورید.

(راهنمایی : برداری که با محورها زاویه یکسان دارد به‌صورت $\vec{b}=(x,x,x)$ که $x\neq ۰$ است)

۷ اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار مخالف صفر باشند نشان دهید.

$|a+b|^۲+|a-b|^۲=۲|a|^۲+۲|b|^۲$

۸ سه رأس مثلث ABC، $A(۲,۱,۱)$ و $B(۳,۱,۲)$ و $C(۲,۳,۱)$ است زاویه داخلی B چند درجه است. (راهنمایی بردارهای $\vec{BA}$ و $\vec{BC}$ را تشکیل داده و زاویه بین آنها را حساب می‌کنیم).

۹ اگر $\vec{a}=(۳,m,۵)$ و $\vec{b}=(۳-m,۷,۰)$ و بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ بر هم عمود باشند. زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است.

(راهنمایی : $|\vec{a}|=|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b}$)

۱۰ اگر $\vec{a}=(۲,۱,۲)$ و $|b|=۲$ و زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{\pi}{۶}$ باشد. حاصل $(a-b)$. $(۳a-۲b)$ را به‌دست آورید.

۱۱ اگر a و b بردارهایی به طول ۵ سانتی‌متر و زاویه بین آنها $\frac{\pi}{۴}$ باشد، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $(\vec{a}-۲\vec{b})$ و $(۳\vec{a}+۲\vec{b})$ ساخته می‌شود را حساب کنید.

۱۲ اگر $\vec{a}=(۱,۲,-۱)$ و $\vec{b}=(۳,۰,۱)$ دو بردار باشند مساحت متوازی‌الاضلاعی که بردارهای $(\vec{a}+۳\vec{b})$ و $(۲\vec{a}-\vec{b})$ می‌سازند را بیابید.

۱۳ اگر سه نقطه $A(۲,۱,-۱)$ و $B(۱,۰,-۲)$ و $C(۳,۱,۱)$ سه رأس یک مثلث باشند. مساحت مثلث را بیابید.

۱۴ اگر $|a| = ۲$ و $|b| = ۳$ و $a.b = \frac{۱۸}{۵}$ باشد مساحت مثلثی که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را می‌سازند بیابید.

۱۵ حجم متوازی‌السطوحی را بیابید که توسط سه بردار $\vec{a} = (۳,۲,۱)$ ، $b = (۰,-۱,۴)$ و $a \times b$ می‌سازند.

۱۶ اگر سه بردار $\vec{a} = (۰,-۱,۲)$ ، $\vec{b} = (m,-۱,۳)$ و $\vec{c} = (۴,۱,۲)$ در یک صفحه باشند مقدار m کدام است.

۱۷ نقطه $A(۳,-۲,۴)$ مفروض است.

الف) اگر از A بر صفحه xz عمود کنیم و پای عمود را B بنامیم مختصات B کدام است.

ب) اگر از A بر محور yها عمود کنیم و پای قائم را C بنامیم، مختصات C کدام است.

ج) طول پاره‌خط BC را بیابید.

۱۸ اگر $A(۰,۱,-۱)$ ، $B(۱,۱,۰)$ و $C(۱,۱,-۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند.

الف) مختصات M وسط BC را به‌دست آورید.

ب) طول میانه AM از مثلث را بیابید.

ج) مختصات نقطه G، نقطه برخورد میانه‌ها را به‌دست آورید.

د) طول AG را به‌دست آورید و نشان دهید $AG = \frac{۲}{۳}AM$.

۱۹ وجه‌های یک مکعب مستطیل قسمتی از صفحات به معادلات $x = -۱$ ، $x = ۲$ ، $y = -۳$ ، $y = ۴$ ، $z = -۱$ و $z = ۲$ است.

الف) معادله وجهی را بنویسید که موازی صفحه yoz و در قسمت منفی محور zها باشد.

ب) معادله یالی را بنویسید که در هر دو صفحه $x = ۲$ و $z = ۲$ باشد.

ج) مختصات رأسی از مکعب مستطیل را بنویسید که همه مؤلفه‌های آن مثبت باشد.

۲۰ مؤلفه‌های بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} + \vec{j} + ۳\vec{k}$ را روی محور مختصات نشان دهید. سپس طول بردار را به‌دست آورید.

۲۱ بردارهای $\vec{a} = \vec{i} - ۲\vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{j} + ۲\vec{k}$ مفروض‌اند.

الف) طول بردار $\vec{a} - ۲\vec{b}$ را بیابید.

ب) طول بردار $۲\vec{a} + \vec{b}$ را به‌دست آورید.

ج) حاصل $\frac{|\vec{a} - ۲\vec{b}|}{|۲\vec{a} + \vec{b}|}$ را به‌دست آورید.

۲۲ اگر $\vec{a} = \vec{i} - ۲\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{b} = (۳,۱,۲)$ باشد و $r = ۴$ نشان دهید :

$$r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

درس اول

معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

اهداف درس

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند :

۱ آشنایی با فضای $\mathbb{R}^2$ و درک مفهوم زوج مرتب و نقطه در صفحه و نقش و ارتباط این دو مفهوم در تعریف $\mathbb{R}^2$ به‌صورت اصل موضوعی.

۲ کسب مهارت یافتن نواحی محصور به خطوط در $\mathbb{R}^2$ و تقویت قوه تجسم مفاهیم جبری ــ هندسی.

۳ آشنایی با فضای $\mathbb{R}^3$ و پیوند آن با مفاهیم پیش‌آموخته درباره فضای سه‌بعدی.

۴ یادآوری و تعمیم مفهوم بردارها در فضای $\mathbb{R}^2$ و اعمال و خواص آنها.

۵ آشنایی با بردارها در فضای $\mathbb{R}^3$ و اعمال و خواص آنها.

ارائه محتوا

هدف نهایی این درس معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ و بردارها در این فضا می‌باشند. اما برای این منظور ابتدا باید فضای $\mathbb{R}^2$ و نیز بردارها در این فضا به نحو دقیق‌تری نسبت به دانش قبلی دانش‌آموزان مطالعه و بررسی شوند تا زمینه برای معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ و بردارها در این فضا مهیا شود. ساختار کلی این درس به‌صورت زیر است :

یادآوری و تعمیم مفاهیم در $\mathbb{R}^2$ ⟵ معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ ⟵ بردارها در $\mathbb{R}^2$ ⟵ بردارها در $\mathbb{R}^3$

دلیل این ترتیب محتوایی این است که برای معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ نیاز است تا فضای $\mathbb{R}^2$ به‌صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها معرفی شوند و نیز برخی مفاهیم مقدماتی مانند نقطه و خط در صفحه یادآوری گردند. گفتنی است که دانش‌آموزان قبلاً به طور شهودی کار کردن با صفحه مختصات را یاد گرفته‌اند لیکن در اینجا تلاش می‌شود که همان مفاهیم را در بستری کمابیش اصل موضوعی ارائه دهیم (البته نه کاملاً).

در واقع تعریف دقیق فضای $\mathbb{R}^2$ به‌صورت :

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

برای اولین بار است که معرفی می‌شود و تناظر بین زوج مرتب‌ها در تعریف فوق که یک مفهوم اصل موضوعی است و نقاط صفحه که یک مفهوم شهودی آشنا برای دانش‌آموز است. نقش کلیدی در

درونی‌سازی مفهوم فضای $\mathbb{R}^2$ توسط دانش‌آموز دارد. در واقع تعریف فضای $\mathbb{R}^2$ را می‌توان به‌کلی مستقل از هندسه درک کرد. در این راستا صفحه دکارتی تجسم شهودی (و بلکه هندسی) فضای مجرد $\mathbb{R}^2$ است. تأکید بر تناظر بین زوج مرتب‌ها در تعریف $\mathbb{R}^2$ و نقاط صفحه، دانش‌آموز را با درک مفاهیم انتزاعی مانند $\mathbb{R}^2$ یاری می‌دهد.

به‌منظور ارتقای توانایی تجسم هندسی دانش‌آموزان و دست‌ورزی بیشتر با فضای $\mathbb{R}^2$ کار در کلاس صفحه ۶۲ طراحی شده است.

کار در کلاس صفحه ۶۲

هدف از این کار در کلاس کمک به ذهن دانش‌آموز در عبور از مفاهیم تابعی و نمودارهای تابعی در صفحه $\mathbb{R}^2$ است. به دلیل اینکه در سال‌های گذشته دانش‌آموز از صفحه دکارتی عمدتاً برای رسم توابع استفاده کرده است، نوعی ارتباط پنهان بین توابع و صفحه $\mathbb{R}^2$ به‌وجود آمده است. در این ارتباط بخش کلیدی صفحه، محورهای x و y هستند و نیز ارتباطی که ضابطه یک تابع با این دو محور دارد. بنابراین بدنه صفحه $\mathbb{R}^2$ چندان مورد توجه نیست و زیرسایه نمودارهای تابعی کم‌رنگ شده است. از طرفی عمده شکل‌هایی که دانش‌آموزان در دستگاه دکارتی رسم کرده‌اند از جنس تابع بوده‌اند و درک عمیقی از اینکه چگونه می‌توان یک ناحیه از صفحه را (که لزوماً تابع نیست و یا اصلاً منحنی نیست) را مشخص کرد ندارد. این ناتوانی می‌تواند به ضعف در درک خواص فضای $\mathbb{R}^2$ منجر شود. برای عبور از غلبه منحنی‌های تابعی که در آنها اغلب محورهای x و y نقش برجسته‌ای دارند، این کار در کلاس تلاش دارد تا توجه دانش‌آموزان را به ابعادی دیگر از صفحه دکارتی جلب کند. البته در این مسیر تنها به دانش‌های قبلی دانش‌آموز بسنده می‌شود و از نمودارهای پیچیده یا نواحی پیچیده تعمداً اجتناب شده است.

از طرفی این کار در کلاس در پیوند با مفهوم مکان هندسی، که در فصل قبل به آن پرداخته شده، می‌باشد چرا که هر ناحیه خواسته شده در واقع مکان هندسی نقاطی از $\mathbb{R}^2$ است که در آن رابطه (های) داده شده صدق می‌کنند. همچنین مهارت تجسم این‌گونه نواحی به دانش‌آموز امکان تجسم رویه‌ها و خم‌ها در $\mathbb{R}^3$ در سطوح بالاتر ریاضی را می‌بخشد هرچند که راهی نسبتاً طولانی باید پیموده شود، لیکن این اولین گام لازم برای کسب آن مهارت است.

در ادامه این درس به معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ پرداخته شده است. برای این منظور از ادبیات استفاده شده در بخش اول این درس برای فضای $\mathbb{R}^2$ کمک گرفته شده است. از طرفی سعی شده است با قرینه‌های دنیای واقعی مانند کنج اتاق اجزای این فضا را شهودی‌تر کنیم. توجه شود که در این فصل خاصیت راست‌گرد بودن محورها بررسی نمی‌شود.

پس از معرفی محورها و صفحات، به معرفی هشت ناحیه دستگاه $\mathbb{R}^3$ پرداخته شده است. با توجه به ماهیت دوبعدی تصاویر امکان نمایش همه ناحیه‌ها در یک تصویر وجود ندارد. توصیه می‌شود که دبیران محترم از نرم‌افزارهای نمایش سه‌بعدی و یا برخی ویدئوهای آموزشی موجود که در آنها زاویه دید بیننده به دور دستگاه می‌چرخد استفاده کنند. در ادامه برای نمایش نقطه در $\mathbb{R}^3$ ابتدا از مهارت دانش‌آموز برای یافتن نقطه در صفحه بهره برده شده است و سپس نقطه مشخص شده در صفحه xy را به اندازه z در راستای عمود تغییر می‌دهیم. به‌منظور نمایش رابطه‌ای که هر نقطه با محورهای سه‌گانه و نیز صفحات سه‌گانه دارد مجدداً یک نقطه را در نظر گرفته‌ایم و صفحاتی که گذرنده از آن نقطه و عمود بر صفحات سه‌گانه اصلی است را نمایش داده‌ایم. در این وضعیت نقطه مزبور در کنج یک مکعب مستطیل قرار می‌گیرد که ابعاد آن با سه‌تایی (x,y,z) نقطه مربوطه برابر است. ارائه مثال‌های مختلف در نواحی گوناگون از سوی دبیران محترم برای آموزش مهارت نمایش نقاط در $\mathbb{R}^3$ ضروری است.

در ادامه به فاصله دو نقطه در $\mathbb{R}^3$ پرداخته شده و رابطه آن استخراج شده است. برای سادگی ابتدا حالتی که یکی از نقاط مبدأ مختصات است در نظر گرفته شده و سپس حالت کلی مطرح شده است. از آنجا که در فرایند کشف رابطه مزبور از دانش قبلی دانش‌آموز برای یافتن فاصله دو نقطه در صفحه استفاده شده است، در صورت نیاز دبیران محترم می‌توانند با مثالی دوبعدی رابطه فاصله دو نقطه در صفحه را مرور کنند.

فعالیت صفحه ۶۷

هدف از این فعالیت آشنایی دانش‌آموزان با برخی خطوط و صفحات خاص ساده می‌باشد. در این فصل به معادله خط و معادله صفحه به‌طور کلی پرداخته نشده و تنها به مرور مفاهیم ساده‌ای از خط و صفحه که دانش‌آموزان قبلاً در هندسه ۲ به‌طور غیرتحلیلی با آن آشنا شده‌اند می‌پردازیم اما این بار با بیان تحلیلی. از این رو ادبیات به‌کار رفته برای معرفی خطوط و صفحات ساده (که حالات خاصی هستند) به بحث مکان هندسی در فصل قبلی کتاب نزدیک است. در اینجا نیز یکی از اهداف تقویت تجسم هندسی دانش‌آموزان است.

کار در کلاس صفحه ۶۸

این کار در کلاس تعمیم فعالیت صفحه ۶۷ می‌باشد. با انجام این فعالیت دانش‌آموزان وضعیت خط و صفحه‌ها در $\mathbb{R}^3$ را که قبلاً به‌صورت هندسی با آنها آشنا شده‌اند تا حدودی به‌صورت تحلیلی مرور می‌کنند.

بخش بعدی این فصل به بررسی بردارها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ می‌پردازد. از آنجا که مرور بردارها در $\mathbb{R}^2$ مقدمه طرح موضوع در $\mathbb{R}^3$ است، ابتدا بردارها را در $\mathbb{R}^2$ یادآوری کرده و تا اندازه تعمیم می‌دهیم و سپس به معرفی بردارها در $\mathbb{R}^3$ می‌پردازیم.

قسمت ابتدایی صفحه ۶۹ به یادآوری مفهوم بردار که دانش‌آموزان در متوسطه اول فرا گرفته‌اند می‌پردازد و به سرعت وارد خواص آنها در دستگاه مختصات دوبعدی می‌شود. عمده این خواص قبلاً در متوسطه اول آموزش داده شده لیکن در اینجا سعی شده تا اندازه‌ای با ادبیاتی جدید و نمادهای مرسوم در کتب ریاضیاتی ارائه شوند. گفتنی است جمع بردارها به روش مثلث گفته شده و دبیران محترم می‌توانند در صورت نیاز آن را یادآوری کنند لیکن هدف نهایی به‌دست آوردن حاصل جمع دو بردار است فارغ از روش استفاده.

مثال صفحه ۷۱

در این مثال مفاهیم آموخته شده در متوسطه اول در خصوص بردار یادآوری و تعمیم می‌یابد. دانش‌آموزان در متوسطه اول نحوه به‌دست آوردن حاصل‌جمع دو بردار داده شده را فرا گرفته‌اند. اما در این مثال بردار برایند $\vec{l}$ داده شده و از دانش‌آموز خواسته شده تا بردار نیروی محرکه $\vec{t}$ را چنان بیابد که در نهایت برایند دو بردار $\vec{w}$ و $\vec{t}$ برابر $\vec{l}$ شود. این در واقع عکس عملیاتی است که قبلاً در متوسطه اول فرا گرفته و در واقع عمل تفریق بردارها را به‌صورت غیرمستقیم به نمایش می‌گذارد. می‌توان به بردار $\vec{t}$ به مثابه یک بردار متغیر نگاه کرد که باید آن را چنان تغییر دهیم تا نتیجه دلخواه حاصل شود. این نوع نگاه سطح شناختی بالاتری را مطالبه می‌کند که در واقع تعمیمی از مفهوم بردار در متوسطه اول است که در آن بردارها ثابت بود و عمل‌ها بین آنها انجام می‌شد. واقعی بودن موقعیت این مثال به جذابیت آن می‌افزاید. دبیران محترم می‌توانند مثال‌های متنوع دیگری مثلاً در مورد حرکت یک کشتی در دریا را ارائه دهند که وضعیت‌های مختلفی بین بردارها را نمایش دهد.

در ادامه به‌طور مختصر بردارهای یکه در $\mathbb{R}^2$ یادآوری شده و سپس در کار در کلاس صفحه ۷۳ عمده

مباحث مربوط به بردارها در $\mathbb{R}^2$ جمع‌بندی و مرور شده است. چنانچه در خلال انجام این کار در کلاس دبیران متوجه بدفهمی خاصی از سوی دانش‌آموزان شدند می‌بایست اندکی درنگ کرده و پس از ارائه مثال‌های متنوع و رفع بدفهمی به سراغ بخش بعدی که بردارها در $\mathbb{R}^3$ است بروند.

در صفحه ۷۳ بردارها در $\mathbb{R}^3$ معرفی و اعمال و خواص آنها با تعمیم آنچه که در مورد بردارها در $\mathbb{R}^2$ گفته شده بود مطرح می‌شود.

هدف از کار در کلاس صفحه ۷۴ دست‌ورزی بیشتر با عملیات برداری در $\mathbb{R}^3$ است. به دبیران محترم توصیه می‌شود که نمونه‌های مشابه این کار در کلاس را ارائه دهند تا از دریافت مفاهیم مقدماتی بردارها در $\mathbb{R}^3$ بخصوص تجسم فضایی بردارهایی که انتهای آنها در نواحی غیرناحیه اول است اطمینان حاصل کنند.

در ادامه خواص جمع بردارها بدون اثبات آورده شده است. گرچه از دید دانش‌آموزان بسیاری از این خواص بدیهی هستند و نیازی به اثبات ندارند اما اثبات برخی از آنها می‌تواند آموزنده باشد گرچه برای ارزشیابی مدنظر نیست.

درس دوم
ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

اهداف درس

در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر دست یابند :

۱ آشنایی با ضرب داخلی دو بردار و ارتباط آن با زاویه بین دو بردار.

۲ آشنایی با ضرب خارجی دو بردار و ارتباط آن با زاویه بین دو بردار.

۳ کسب مهارت یافتن تصویر یک بردار در امتداد یک بردار دیگر.

۴ کسب مهارت یافتن مساحت یک متوازی‌الاضلاع با داشتن بردارهای سازنده آن.

۵ کسب مهارت یافتن حجم یک متوازی‌السطوح با داشتن بردارهای سازنده آن.

ارائه محتوا

این درس با آموزش ضرب داخلی دو بردار آغاز می‌شود. برای این منظور اغلب دو مسیر در منابع آموزشی استفاده شده است. یک راه بهره‌گیری از فرایند یافتن تصویر قائم یک بردار در امتداد بردار دیگر است و راه دوم استفاده از فرایند یافتن زاویه بین دو بردار است. در هر دو فرایند عبارتی ظاهر می‌شود و آن را ضرب داخلی دو بردار معرفی می‌کنند. در کتاب هندسه ۳ مسیر دوم انتخاب شده است چرا که به‌نظر دنبال کردن آن ساده‌تر است و نیاز به دانش قبلی کمتری دارد. از طرفی این رویکرد نقش زاویه را در تعریف ضرب داخلی تا حدودی پررنگ‌تر می‌کند چرا که یکی از کاربردهای عملی استفاده از ضرب داخلی، یافتن میزان دور یا نزدیک بودن دو بردار از یکدیگر است و زاویه بین دو بردار در اینجا نقش محوری دارد.

پس از بررسی نحوه تعریف ضرب داخلی دو بردار در $\mathbb{R}^2$ ، تعمیم آن در $\mathbb{R}^3$ به‌صورت تعریف آمده است. در صفحه ۷۹ برخی خواص ضرب داخلی همراه با اثبات آنها آمده است. از جمله خواص مهم می‌توان به رابطه تعامد دو بردار با ضرب داخلی و نیز نامساوی کشی شوارتز اشاره کرد.

در صفحه ۷۹ تصویر قائم یک بردار بر امتداد برداری دیگر آموزش داده شده است که در آن از رابطه تعامد دو بردار کمک گرفته شده است. یکی از ویژگی‌های این اثبات در عین سادگی قابلیت تعمیم آن به فضای اقلیدسی بالاتر بدون افزودن پیچیدگی آن است.

در کار در کلاس صفحهٔ ۸۰ تمام خواص ضرب داخلی مرور می‌شود و بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان کشف و با ارائه مثال‌های بیشتر توسط دبیران محترم رفع می‌گردد.

بخش دوم این درس به مفهوم ضرب خارجی می‌پردازد. از آنجا که دانش‌آموزان قبلاً با دترمینان ماتریس در فصل اول آشنا شده‌اند، بنابراین تعریف ضرب خارجی براساس دانش قبلی دانش‌آموز ارائه شده است. استدلال اینکه چرا ضرب خارجی دو بردار به این صورت تعریف شده خارج از حوصله این کتاب است. کوتاه اینکه برخی کمیت‌های فیزیکی مانند گشتاور نیروی وارد بر یک صفحه که بر صفحه عمود است به کمک این نوع ضرب بین بردارها قابل محاسبه هستند و از این رو انگیزه‌ای برای تعریف ضرب خارجی دو بردار به‌صورت فعلی می‌باشند.

در ادامه اندازه حاصل‌ضرب خارجی دو بردار با کمک محاسبه‌ای ساده براساس مفاهیم مقدماتی بردارها به‌دست می‌آید. در صفحه ۸۲ برخی خواص ضرب خارجی مطرح شده است و اثبات برخی از آنها ذکر شده است. ارائه اثبات دیگر خواص نیز توصیه می‌شود.

در انتهای این درس کاربردی از ضرب داخلی و ضرب خارجی که همان یافتن حجم متوازی‌السطوح است آمده است. تمرین‌های ص ۸۴، تمرین‌های ۳ و ۴ و ۶ بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان در خصوص خواص ضرب داخلی و خارجی را هدف گرفته است.